

Analyse bayésienne de modèles d'évolution de ressources naturelles

Marie Denis

Université Montpellier II

marie.denis@cirad.fr

Montpellier, le 28 Avril 2010

plan

- 1 Problématique
 - Mise en place du problème
 - Filtre optimal
- 2 Filtrage particulaire
 - Principe
 - Filtre bootstrap
- 3 Améliorations du filtrage particulaire
- 4 Applications
 - Application à la pêche

plan

- 1 Problématique
 - Mise en place du problème
 - Filtre optimal
- 2 Filtrage particulière
 - Principe
 - Filtre bootstrap
- 3 Améliorations du filtrage particulière
- 4 Applications
 - Application à la pêche

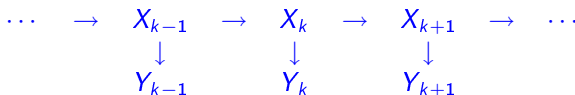
Mise en place du modèle

Soit le système dynamique :

$$\begin{cases} X_{k+1} = f(X_k, W_k) \\ Y_k = h(X_k, V_k) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{équation d'état} \\ \text{équation d'observation} \end{array}$$

où W_k , V_k et X_0 sont indépendants.

- ▶ modèle de Markov caché



- ▶ ingrédients du modèle :

$$\mu_0(dx) \stackrel{\text{d'éf}}{=} \mathbb{P}(X_0 \in dx) \quad \text{loi initiale}$$

$$Q(x, dx') \stackrel{\text{d'éf}}{=} \mathbb{P}(X_k \in dx' | X_{k-1} = x) \quad \text{loi de transition (ou noyau)}$$

$$\psi(x, y) dy \stackrel{\text{d'éf}}{=} \mathbb{P}(Y_k \in dy | X_k = x) \quad \text{vraisemblance}$$

- ▶ **but** : reconstruire l'état caché X_k (ou les états cachés $X_{1:T}$) sachant une réalisation des observations

- ▶ **contexte environnemental** :

- données très bruitées
- modèles incertains (paramètres inconnus)
- période d'acquisition des données élevée ($Y_{1:T}$)
- phénomène complexe

→ cadre de travail bayésien bien adapté

- ▶ solutions :

- lisseur : $\text{loi}(X_{1:T} | Y_{1:T} = y_{1:T})$
- filtre : $\text{loi}(X_k | Y_{1:k} = y_{1:k}) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \pi_k$

- ▶ **but** : reconstruire l'état caché X_k (ou les états cachés $X_{1:T}$) sachant une réalisation des observations

- ▶ **contexte environnemental** :
 - données très bruitées
 - modèles incertains (paramètres inconnus)
 - période d'acquisition des données élevée ($Y_{1:T}$)
 - phénomène complexe

→ cadre de travail bayésien bien adapté

- ▶ solutions :
 - lisseur : $\text{loi}(X_{1:T} | Y_{1:T} = y_{1:T})$
 - filtre : $\text{loi}(X_k | Y_{1:k} = y_{1:k}) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \pi_k$

- ▶ **méthodes MCMC** : approche la $\text{loi}(X_{1:T} | Y_{1:T} = y_{1:T})$
 - deux aspects délicats :
 - 1 diagnostic de convergence difficile
 - 2 temps de convergence assez long
- ▶ **filtres particulières** : approche la $\text{loi}(X_k | Y_{1:k} = y_{1:k}) \stackrel{\text{déf}}{=} \pi_k$
 - 1 traitement en ligne des données
 - 2 méthodes pas conçues pour la modélisation environnementale
- ▶ **objectif** : adapter le filtrage particulaire aux modèles d'évolution de ressources naturelles

- ▶ **méthodes MCMC** : approche la $\text{loi}(X_{1:T} | Y_{1:T} = y_{1:T})$
 - deux aspects délicats :
 - 1 diagnostic de convergence difficile
 - 2 temps de convergence assez long
- ▶ **filtres particulières** : approche la $\text{loi}(X_k | Y_{1:k} = y_{1:k}) \stackrel{\text{déf}}{=} \pi_k$
 - 1 traitement en ligne des données
 - 2 méthodes pas conçues pour la modélisation environnementale
- ▶ **objectif** : adapter le filtrage particulaire aux modèles d'évolution de ressources naturelles

Solution théorique au problème de filtrage : filtre optimal bayésien

- ▶ La suite $(\pi_k)_{k \geq 0}$ constitue **le filtre optimal bayésien**
- ▶ calcul récursif en deux étapes du filtre optimal :
 - prédiction : (équation de Chapman-Kolmogorov)

$$\pi_{k-}(\mathrm{d}x) = \int \pi_{k-1}(\mathrm{d}x') Q(x', \mathrm{d}x)$$

- correction : (formule de Bayes)

$$\pi_k(\mathrm{d}x) = \frac{\psi(x, y_k) \pi_{k-}(\mathrm{d}x)}{\int \psi(x', y_k) \pi_{k-}(\mathrm{d}x')}$$



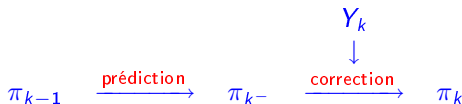
Solution théorique au problème de filtrage : filtre optimal bayésien

- ▶ La suite $(\pi_k)_{k \geq 0}$ constitue **le filtre optimal bayésien**
- ▶ calcul récursif en deux étapes du filtre optimal :
 - prédiction : (équation de Chapman-Kolmogorov)

$$\pi_{k-}(dx) = \int \pi_{k-1}(dx') Q(x', dx)$$

- correction : (formule de Bayes)

$$\pi_k(dx) = \frac{\psi(x, y_k) \pi_{k-}(dx)}{\int \psi(x', y_k) \pi_{k-}(dx')}$$



État de l'art

- ▶ modèle linéaire/gaussien : filtre de Kalman (1966) fournit une solution explicite
- ▶ modèle non linéaire : méthodes d'approximation
 - filtre de Kalman étendu...
 - méthodes particulières (ou méthodes séquentielles de Monte Carlo), Doucet & al. (2001)/ Gordon, Salmon & Smith (1993)

plan

- 1 Problématique
 - Mise en place du problème
 - Filtre optimal
- 2 Filtrage particulaire
 - Principe
 - Filtre bootstrap
- 3 Améliorations du filtrage particulaire
- 4 Applications
 - Application à la pêche

Principe

- ▶ méthode de simulation séquentielle de type Monte Carlo
- ▶ prédiction : $\pi_{k-}(\mathrm{d}x) = \int \pi_{k-1}(\mathrm{d}x') Q(x', \mathrm{d}x)$
- ▶ correction : $\pi_k(\mathrm{d}x) = \frac{\psi(x, y_k) \pi_{k-}(\mathrm{d}x)}{\int \psi(x', y_k) \pi_{k-}(\mathrm{d}x')}$
- ▶ approximation empirique du filtre optimal :

$$\pi_k^N(\mathrm{d}x) = \sum_{i=1}^N w_k^i \delta_{\xi_k^i}(\mathrm{d}x)$$

Filtre Bootstrap

Filtre de base du filtrage particulaire

- 1 étape de prédiction :

$$\pi_{k-}(\mathrm{d}x) \simeq \pi_{k-}^N(\mathrm{d}x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\xi_{k-}^i}(\mathrm{d}x) \quad \text{oé} \quad \xi_{k-}^i \sim Q(\xi_{k-1}^i, \mathrm{d}x)$$

- 2 étape de correction :

- pondération :

$$w_k^i \propto \psi(\xi_{k-}^i, y_k)$$

- redistribution :

$$\xi_k^{1:N} = \text{redistribution}(w_k^{1:N}, \xi_{k-}^{1:N})$$

$$\pi_k(\mathrm{d}x) \simeq \pi_k^N(\mathrm{d}x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\xi_k^i}(\mathrm{d}x)$$

Pour mettre en œuvre le filtre bootstrap, on doit savoir :

- ▶ Simuler selon μ_0
- ▶ Simuler selon $Q(\xi, \cdot)$ pour tout ξ ,
- ▶ Calculer la vraisemblance $\psi(x_k, y_k)$ pour tout x_k
- ▶ redistribuer les particules

exemple

- ▶ soit un système non-linéaire simple

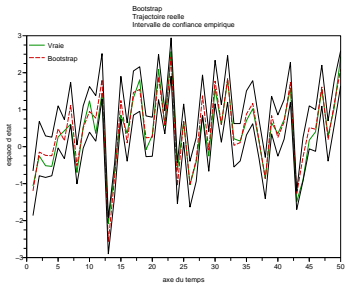
$$\begin{aligned} X_{k+1} &= f(X_k) + W, \\ Y_k &= h(X_k) + V. \end{aligned}$$

où

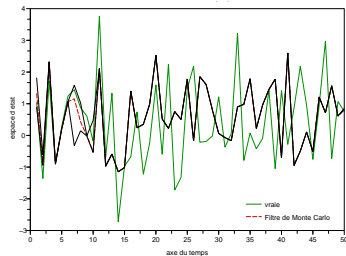
$$f \begin{pmatrix} X_k^1 \\ X_k^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(X_k^1) \\ \frac{X_k^1 X_k^2}{5} \end{pmatrix}, \quad h \begin{pmatrix} X_k^1 \\ X_k^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_k^1 \\ X_k^2 X_k^2 \end{pmatrix},$$

$X_0 \sim \mathcal{N}(0, I)$, $W \sim \mathcal{N}(0, \sigma_W^2 I)$, $V \sim \mathcal{N}(0, \sigma_V^2 I)$ et X_0, W, V sont indépendants.

Exemple : $T = 50$, $N = 1000$, $\sigma_V^2 = 0.1$ et $\sigma_W^2 = 1$



Avec rééchantillonnage



Sans rééchantillonnage

- ▶ **problème** : algorithme lié à la capacité de la loi de transition à prédire les particules dans les régions de forte vraisemblance
- ▶ **idée** : guider nos particules dans des régions de forte vraisemblance à l'aide d'une loi de proposition

$$\xi_{k-}^i \sim Q(\xi_{k-1}^i, dx)$$

$$\xi_{k-}^i \sim Q_{prop}(dx, y_k, \xi_{k-1}^i) + \text{corrections}$$

plan

- 1 Problématique
 - Mise en place du problème
 - Filtre optimal
- 2 Filtrage particulaire
 - Principe
 - Filtre bootstrap
- 3 Améliorations du filtrage particulaire
- 4 Applications
 - Application à la pêche

Amélioration 1 : filtre auxiliaire

On a :

$$\pi_k(dx) \simeq \sum_{i=1}^N \psi_k(x, y_k) w_{k-1}^i Q(\xi_{k-1}^i, dx).$$

- ▶ propagation des particules au moyen d'une loi de proposition de la forme :

$$Q_{prop}(dx, i|y_{1:k}) = g^1(i|y_{1:k}) g^2(dx|i, y_{1:k})$$

où

$$g^2(dx|i, y_{1:k}) = Q(\xi_{k-1}^i, dx)$$

$$g^1(i|y_{1:k}) \propto \psi(\mu_i^k, y_k) w_{k-1}^i.$$

- ▶ μ_i^k caractéristique de la loi de transition $Q(\xi_{k-1}^i, x_k)$

Amélioration 1 : filtre auxiliaire

On a :

$$\pi_k(dx) \simeq \sum_{i=1}^N \psi_k(x, y_k) w_{k-1}^i Q(\xi_{k-1}^i, dx).$$

- ▶ propagation des particules au moyen d'une loi de proposition de la forme :

$$Q_{prop}(dx, i|y_{1:k}) = g^1(i|y_{1:k}) g^2(dx|i, y_{1:k})$$

où

$$\begin{aligned} g^2(dx|i, y_{1:k}) &= Q(\xi_{k-1}^i, dx) \\ g^1(i|y_{1:k}) &\propto \psi(\mu_i^k, y_k) w_{k-1}^i. \end{aligned}$$

- ▶ μ_i^k caractéristique de la loi de transition $Q(\xi_{k-1}^i, x_k)$

Amélioration 2 : Resample-move algorithm

- ▶ coupler les méthodes MCMC et le filtrage particulaire
 - 1 étape de prédiction : au travers d'une méthode MCMC
 - 2 étape de correction : pondération et sélection

plan

- 1 Problématique
 - Mise en place du problème
 - Filtre optimal
- 2 Filtrage particulière
 - Principe
 - Filtre bootstrap
- 3 Améliorations du filtrage particulière
- 4 Applications
 - Application à la pêche

Suivi d'une population de poulpe de Mauritanie

But : évaluer le stock de poulpe (entre 1971 et 2004) et comparer nos résultats avec ceux obtenus par une méthode MCMC

évolution de la biomasse B_t à l'année t : Modèle de Fox (1970)

$$B_{t+1} = [B_t + r B_t (1 - \frac{\log(B_t)}{\log(K)})] \exp(\varepsilon_t) - C_t, \quad \begin{cases} r & \text{tx intrinsèque de croissance} \\ K & \text{capacité biotique} \\ C_t & \text{prise à l'année } t \text{ (donné)} \end{cases}$$

▶ $B_{t \leq 1} = 0.9 K, C_{t \leq 1} = 0$

▶ observation :

$$\ln(l_t) = \ln(q) + \ln(B_t) + \sigma_t \quad \begin{cases} l_t & \text{indice de biomasse relative} \\ q & \text{coefficient de "capturabilité"} \end{cases}$$

▶ état $X_t = B_t$, observation $Y_t = \ln(l_t)$, paramètre $\theta = (r, K, q)$

▶ données et lois a priori : $\sigma = 0.01, \tau = 0.1, K = 460000,$
 $\log(r) \sim \mathcal{N}(1.1, 1.5)$ et $q^{-1} \sim \mathcal{U}_{[10000, 1000000]}$

Mise en place du modèle

- ▶ modèle de Markov caché avec paramètre $(X_{1:T}, Y_{1:T}, \theta)$
- ▶ principe de base : traiter les paramètres comme des variables d'état :
 - loi a priori sur les paramètres
 - loi d'évolution des paramètres : $\theta_{t+1} = \theta_t$
 - mise à jour des paramètres par régularisation avec noyau de convolution
- ▶ estimation de deux lois :
 - $\mathbb{P}(X_k \in dx | Y_{1:k})$
 - $\mathbb{P}(d\theta | Y_{1:T})$

Comparaisons...

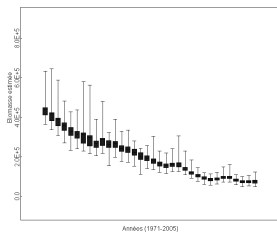
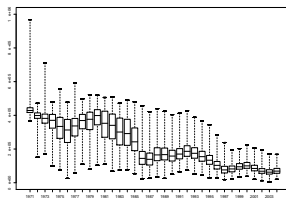
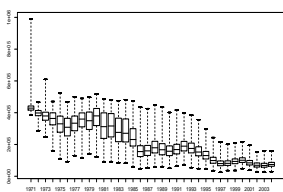


Fig.: Estimation de l'évolution de la biomasse par une méthode MCMC.



Tab.: Estimation de la biomasse entre 1971 et 2004 : filtre auxiliaire et 5000 particules (gauche) / filtre bootstrap et 5000 particules (droite).

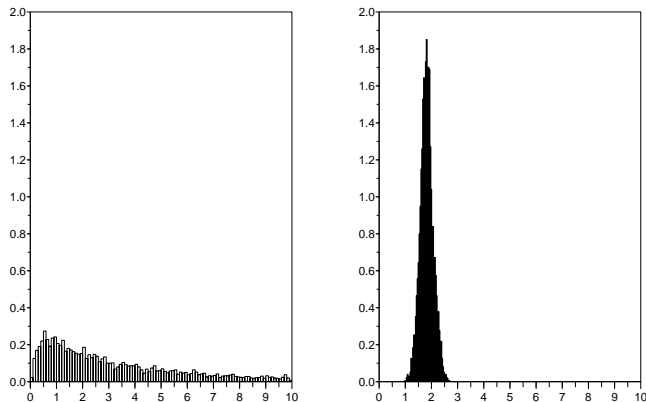
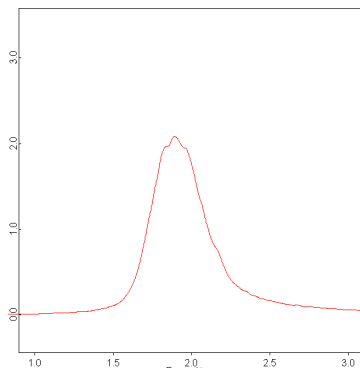
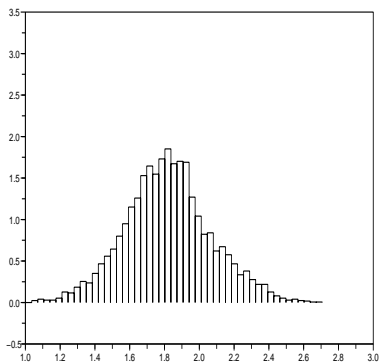
Exemple : $N = 5000$ 

Fig.: Lois de distribution a priori (à gauche) et a posteriori (à droite) pour le taux intrinsèque de croissance r obtenu par le filtre auxiliaire avec 5000 particules.



Tab.: Comparaison filtrage particulaire : filtre auxiliaire avec 5000 particules (gauche) et MCMC (droite) pour la loi a posteriori de r .

Résultats

- ▶ baisse continue de la biomasse
- ▶ résultats obtenus par les filtres particulaires semblables aux résultats obtenus avec une méthode MCMC

→ { les filtres particulaires ont utilisé un nombre suffisant de particules
méthode MCMC a atteint son état stationnaire

Conclusion

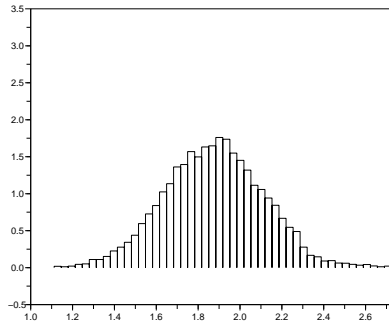
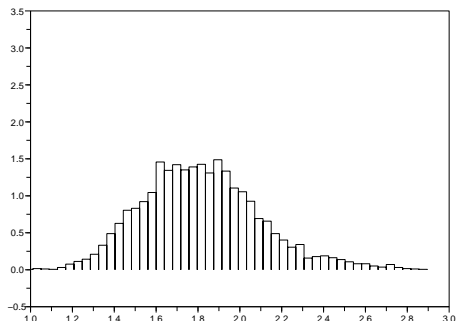
- ▶ mise en place d'une alternative aux méthodes MCMC pour l'inférence sur les modèles environnementaux

- ▶ perspectives :
 - 1 applicative :
 - confirmation de la validité des deux méthodes en approfondissant la comparaison

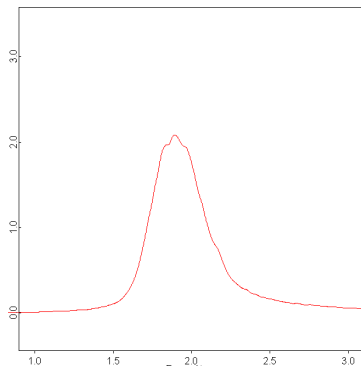
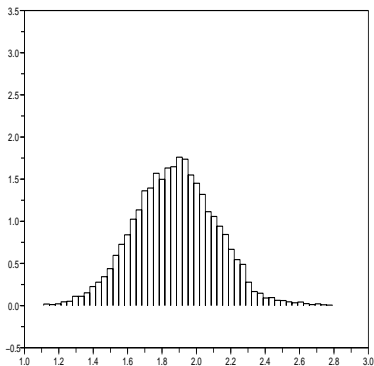
 - 2 méthodologique :
 - vérifier d'autres extensions
 - Resample-move algorithm prometteur

section[annexes]annexes

loi a posteriori de r par le filtre bootstrap avec 5000 et 10000 particules



Tab.: Comparaison filtre bootstrap 5000 particules (gauche) et filtre bootstrap 10000 particules (droite) pour la loi a posteriori de r .



Tab.: Comparaison filtrage particulaire : SIR avec 10000 particules (gauche) et MCMC (droite) pour la loi a posteriori de r .