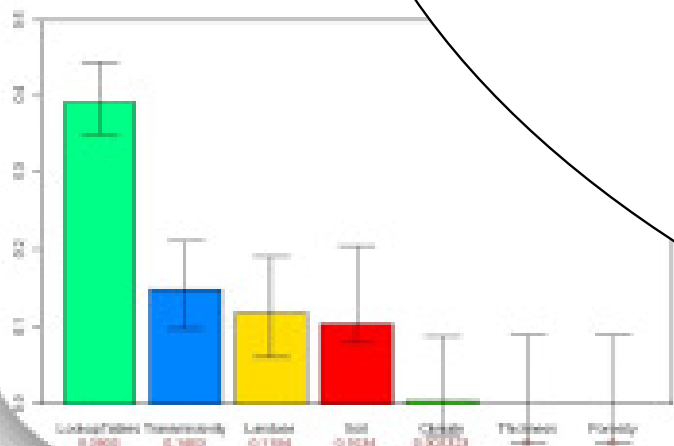


Nathalie SAINT-GEOURS  
Doctorante UMR TETIS

# Analyse de sensibilité globale de modèles spatialisés



Journée OSIDEAL  
28 avril 2010



# Contexte

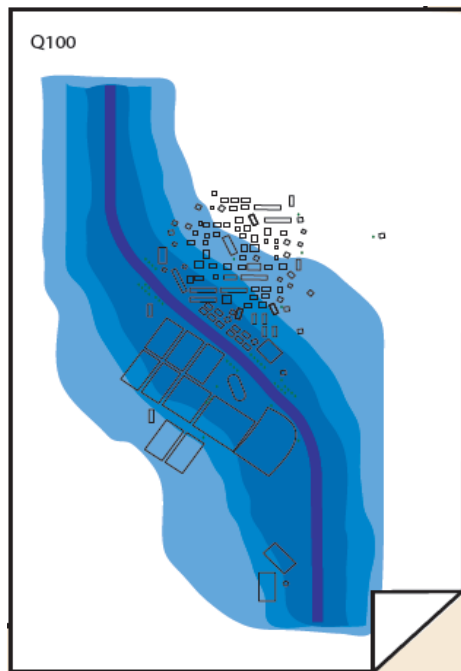
- Modèles :
  - Mécanistes
  - Pluridisciplinaires, emboîtement de « modules »
  - Décomposition analytique difficile
  - Peu ou pas de données réelles à confronter
  - Objectif : aide à la décision

# Contexte

- Outil « Analyse Coût-Bénéfice – Dommages Evités » (ACBDE)
  - Risque d'inondation
  - évaluation économique des politiques de gestion du risque
  - outil spatialisé
  
- Objectif : aide à la décision pour l'aménagement du territoire

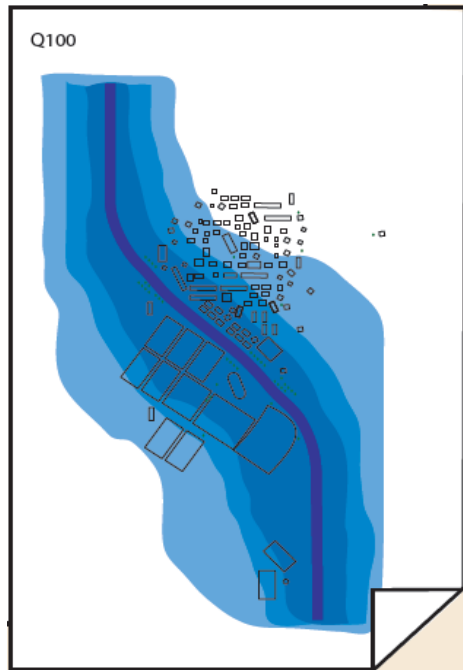
# Contexte

## Aléa



# Contexte

Aléa



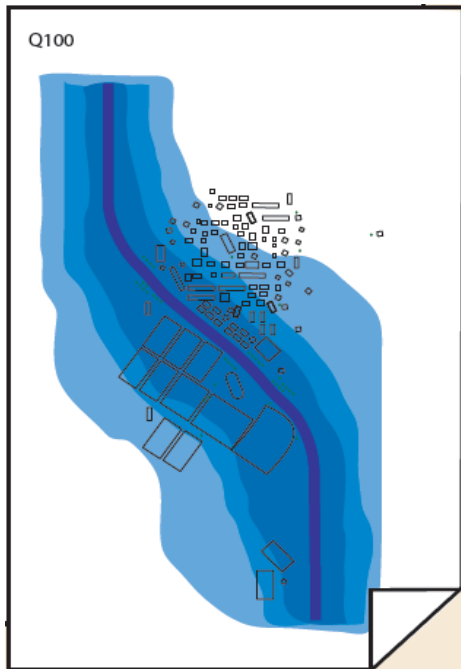
+

Enjeux



# Contexte

## Aléa



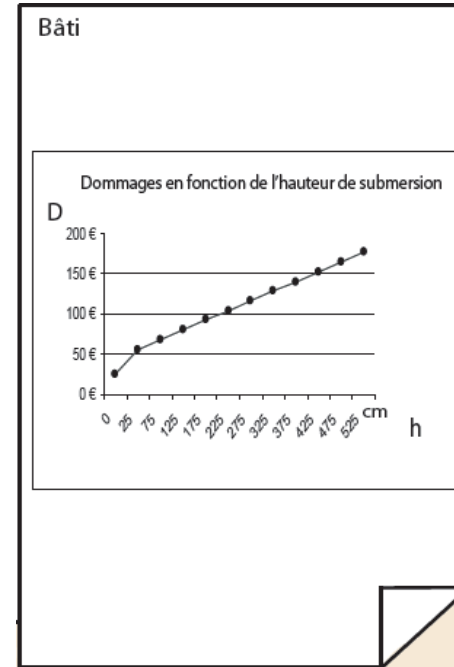
+

## Enjeux



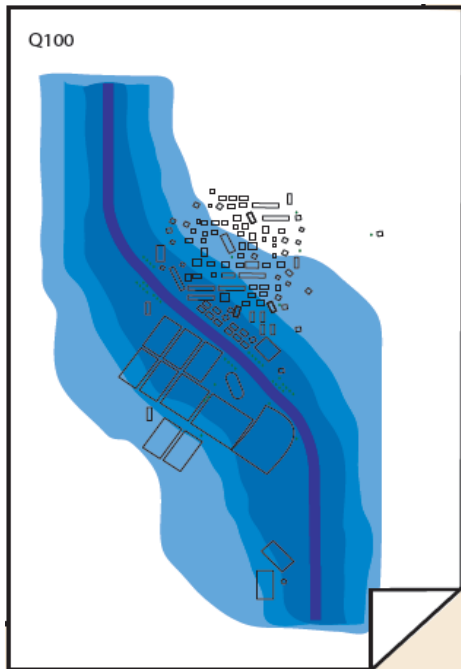
+

## Dommmages



# Contexte

Aléa



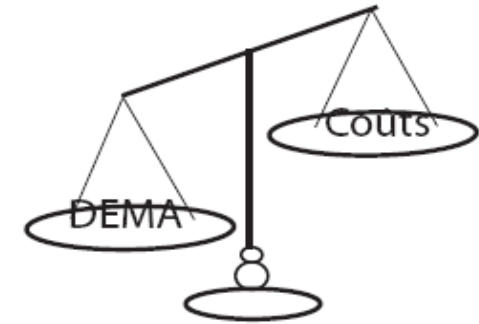
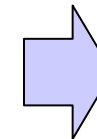
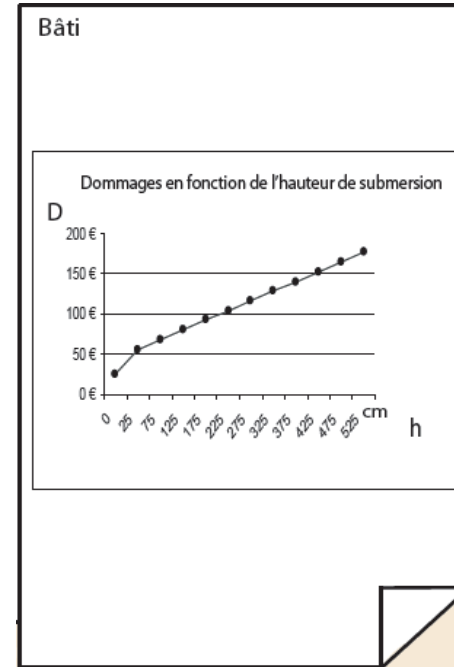
+

Enjeux



+

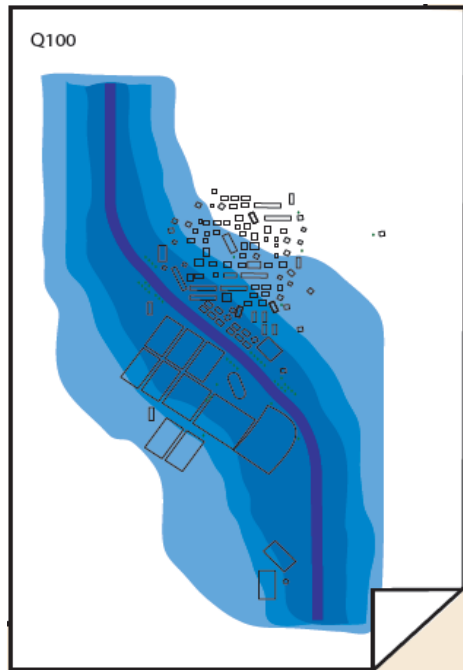
Dommmages



Evaluation économique des scénarios de prévention

# Contexte

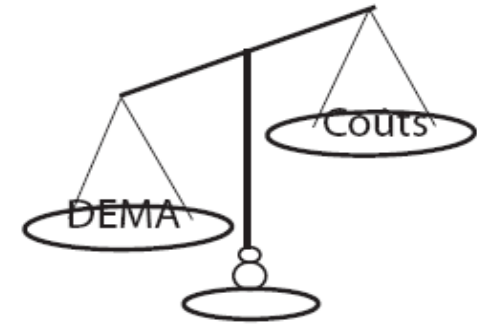
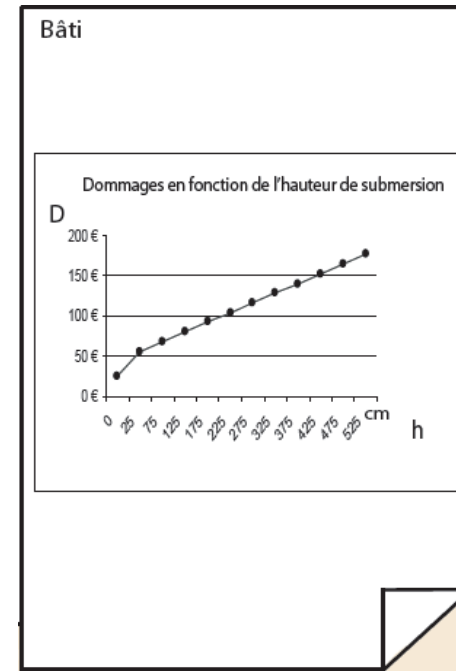
Aléa



Enjeux



Dommmages



Evaluation économique des scénarios de prévention



Calcul d'indicateurs : DMA, DEMA, VAN...

# Des questions...

- Qualité des données d'entrée ?

# Des questions...

- Qualité des données d'entrée ?
- Propagation des incertitudes dans le modèle ?

# Des questions...

- Qualité des données d'entrée ?
- Propagation des incertitudes dans le modèle ?
- Quel impact sur la qualité des indicateurs ?

# Des questions...

- Qualité des données d'entrée ?
- Propagation des incertitudes dans le modèle ?
- Quel impact sur la qualité des indicateurs ?
- Robustesse du modèle ?

# Méthodes d'analyse de sensibilité

**Décrire comment un modèle réagit aux incertitudes qui pèsent sur ses variables d'entrée.**

# Méthodes d'analyse de sensibilité

**Décrire comment un modèle réagit aux incertitudes qui pèsent sur ses variables d'entrée.**

- Objectifs :
  - Identifier les paramètres « clés » dans le modèle
  - Identifier les paramètres que l'on peut « négliger »
  - Associer une plage de confiance aux sorties du modèle

# Méthodes d'analyse de sensibilité

**Décrire comment un modèle réagit aux incertitudes qui pèsent sur ses variables d'entrée.**

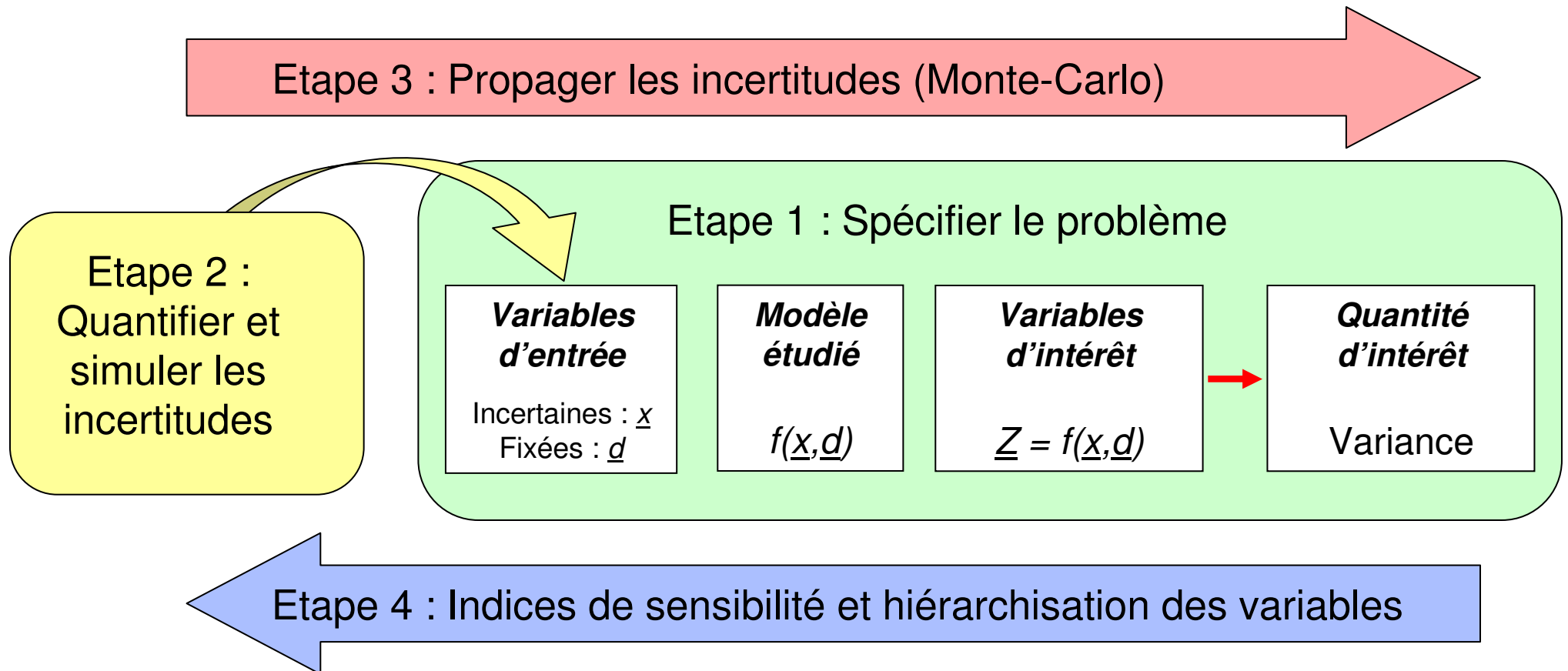
- Objectifs :
  - Identifier les paramètres « clés » dans le modèle
  - Identifier les paramètres que l'on peut « négliger »
  - Associer une plage de confiance aux sorties du modèle
- Diverses méthodes
  - Analytiques / stochastiques
  - Locales / Globales

# Méthodes d'analyse de sensibilité

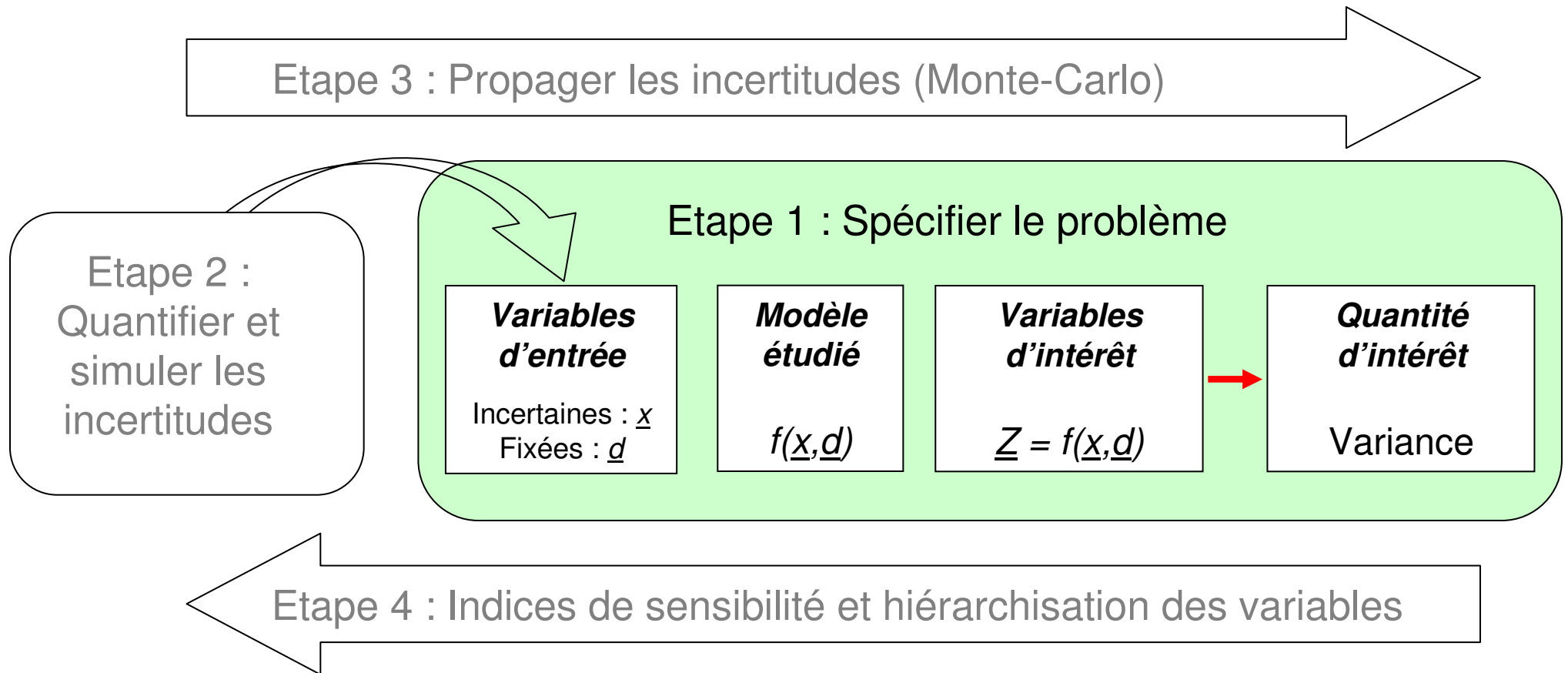
**Décrire comment un modèle réagit aux incertitudes qui pèsent sur ses variables d'entrée.**

- Objectifs :
  - Identifier les paramètres « clés » dans le modèle
  - Identifier les paramètres que l'on peut « négliger »
  - Associer une plage de confiance aux sorties du modèle
- Diverses méthodes
  - Analytiques / stochastiques
  - Locales / Globales
- Analyse de Sobol
  - Décomposition de la variance
  - Globale et stochastique

# Analyse de sensibilité de Sobol



# Analyse de sensibilité de Sobol



# 1. Spécification du problème

# 1. Spécification du problème

- $N = 5$  variables d'entrée incertaines

Variable	Notation	Nature
Occupation du sol	$C_1$	Couche vectorielle SIG – 30 classes
Topologie du terrain	$C_2$	Champ 2D continu (grille 1025 x 1025)
Périodes de retour de crue	$X_3$	Scalaire
Coefficient de crue extrême	$X_4$	Scalaire
Courbes d'endommagement	$X_5$	Matrice

# 1. Spécification du problème

- $N = 5$  variables d'entrée incertaines

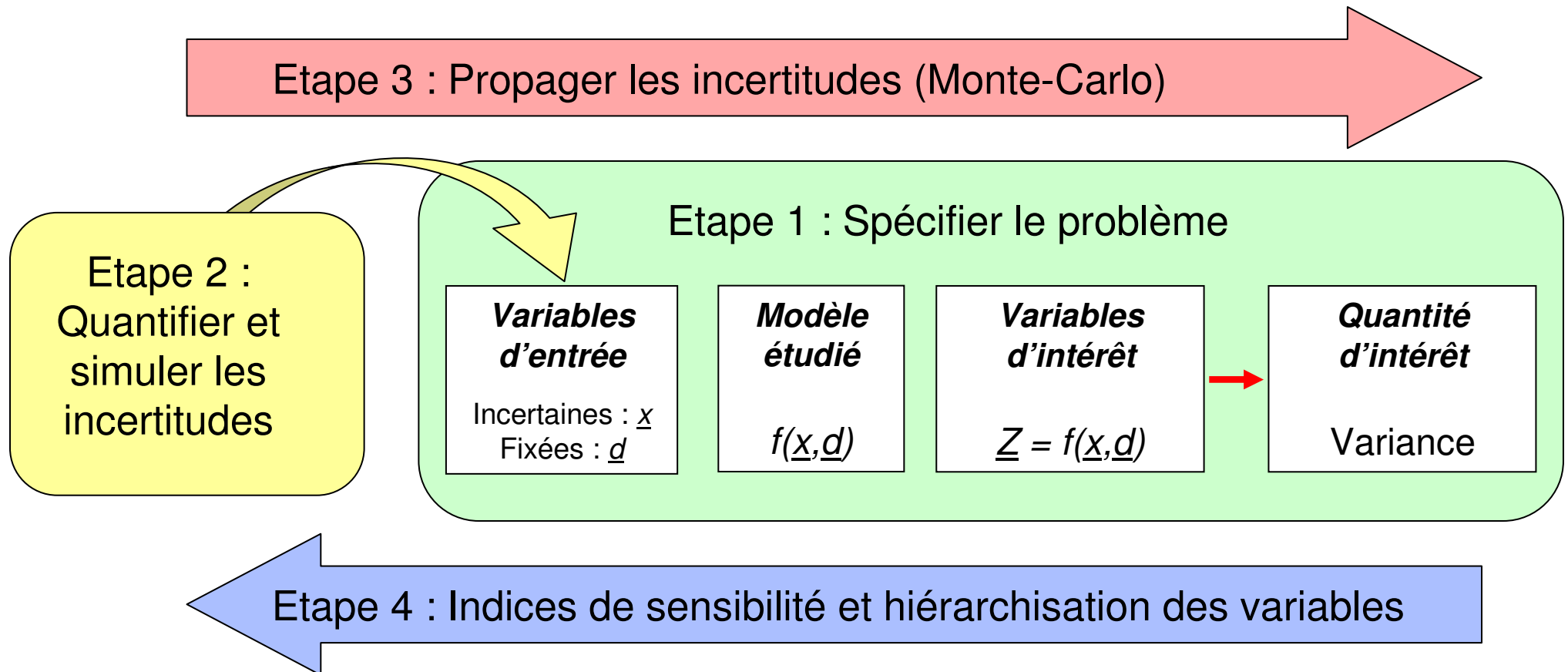
Variable	Notation	Nature
Occupation du sol	$C_1$	Couche vectorielle SIG – 30 classes
Topologie du terrain	$C_2$	Champ 2D continu (grille 1025 x 1025)
Périodes de retour de crue	$x_3$	Scalaire
Coefficient de crue extrême	$X_4$	Scalaire
Courbes d'endommagement	$X_5$	Matrice

- Variable d'intérêt  $Y$  :

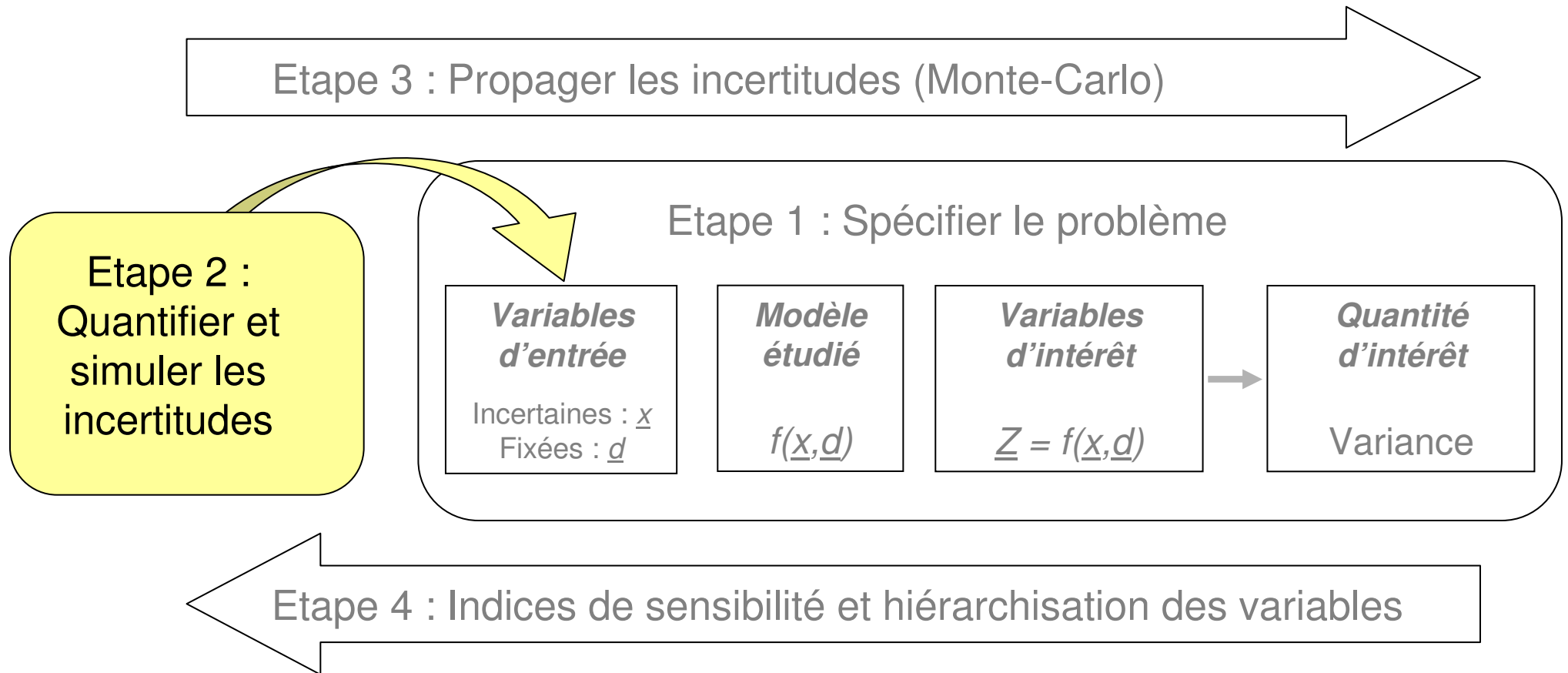
$$Y : \left( \begin{array}{c} \Omega_1 \\ \begin{array}{c} x_1^1 \\ x_1^2 \\ x_1^3 \end{array} \end{array} \right) \times \dots \times \left( \begin{array}{c} \Omega_4 \\ \begin{array}{c} x_N^1 \\ x_N^2 \end{array} \end{array} \right) \times \mathbb{R} \dashrightarrow \mathbb{R}$$

$$(c_1, c_2, c_3, c_4, x_5) \mapsto f(c_1, c_2, c_3, c_4, x_5)$$

## 2. Décrire les incertitudes



# 2. Décrire les incertitudes



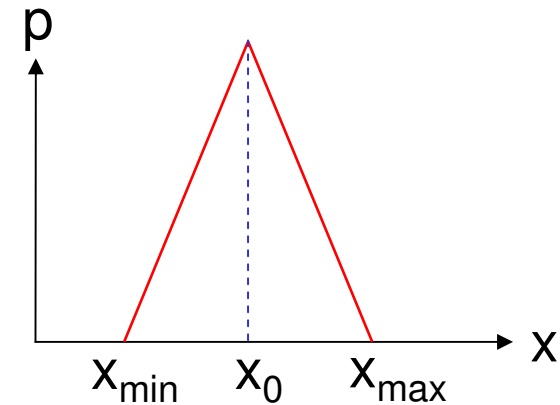
## 2. Décrire les incertitudes

	Périodes de retour	Tables de dommage	Enjeux	MNT	$C_{\infty}$
Dimension	1	1	2	2	0
Incertitude de modèle					
Manque de données					
Erreur de mesure					
Variabilité naturelle					

## 2. Décrire les incertitudes

**Données scalaires**

$X_3, X_4$

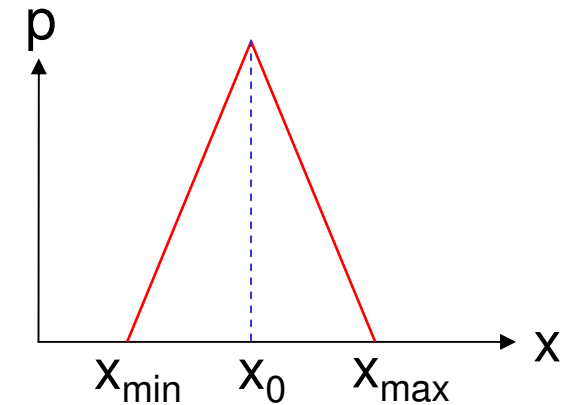


Littérature, expérimentations, dire d'expert...

## 2. Décrire les incertitudes

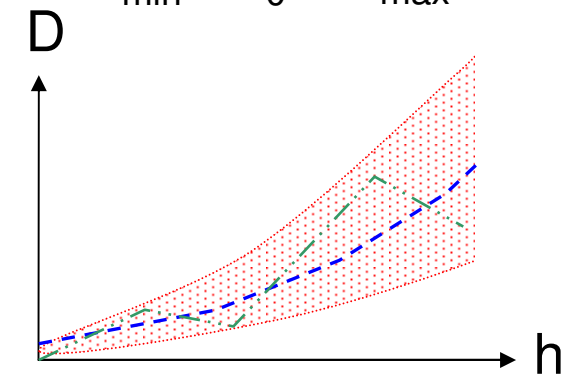
**Données scalaires**

$X_3, X_4$



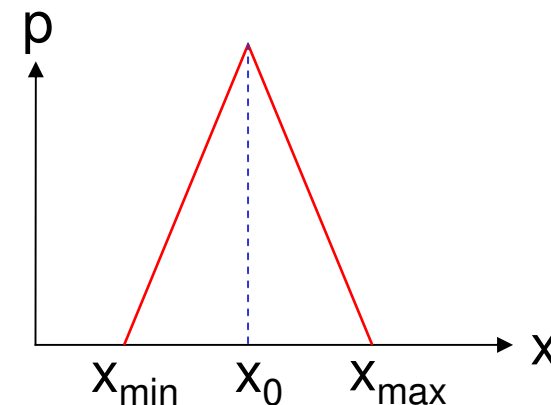
**Données tabulaires  
(1D)**

$X_5$

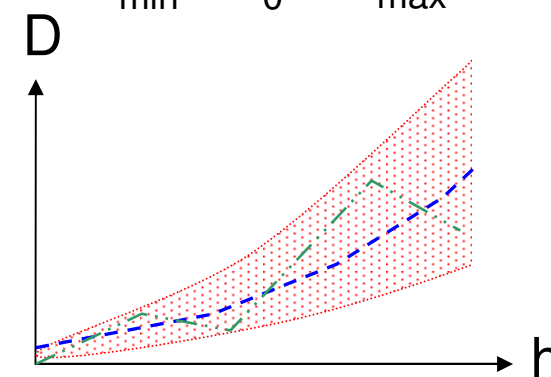


# 2. Décrire les incertitudes

**Données scalaires**  
 $X_3, X_4$



**Données tabulaires (1D)**  
 $X_5$

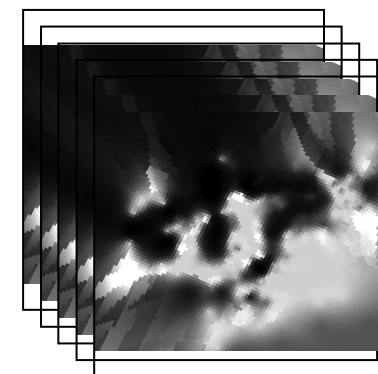


**Données spatialisées (2D)**  
 $C_1, C_2$



**Modèle d'incertitude**

$n$  cartes



## 2. Décrire les incertitudes : carte du sol

- Couche vectorielle
- 7 classes de nature de sol
- Confusion entre classes

	C10	C11	C12	C13	C14	C15	C16
C10	60	10	10	10	5	5	5
C11	10	60	10	10	5	5	5
C12	10	10	60	10	5	5	5
C13	10	10	10	60	5	5	5
C14	10	10	10	10	70	5	5
C15	0	0	0	0	5	65	10
C16	0	0	0	0	5	10	65

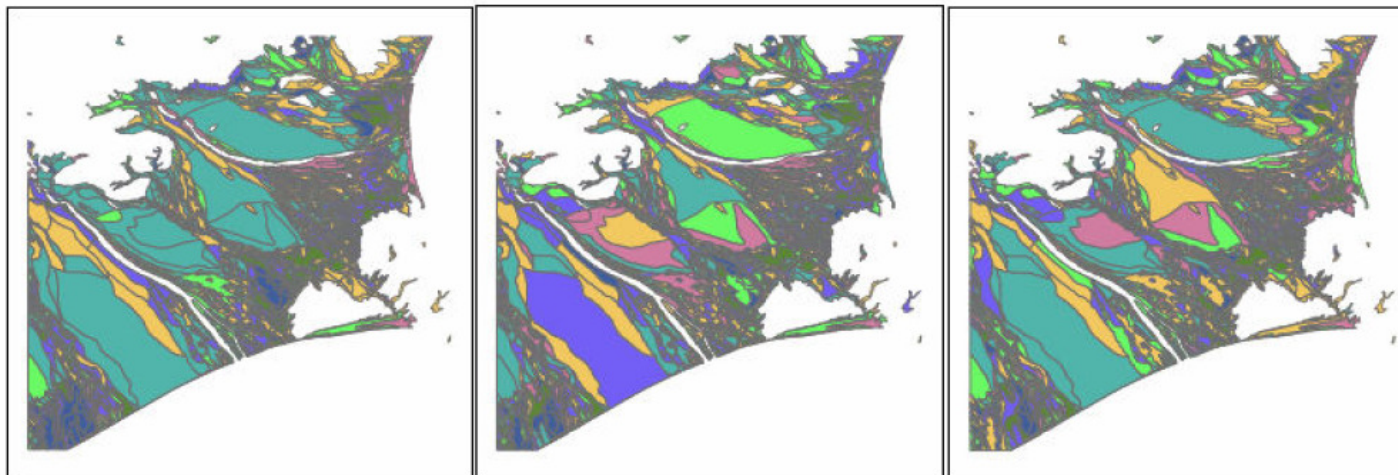
Matrice de confusion entre classes

# 2. Décrire les incertitudes : carte du sol

- Couche vectorielle
- 7 classes de nature de sol
- Confusion entre classes

	C10	C11	C12	C13	C14	C15	C16
C10	60	10	10	10	5	5	5
C11	10	60	10	10	5	5	5
C12	10	10	60	10	5	5	5
C13	10	10	10	60	5	5	5
C14	10	10	10	10	70	5	5
C15	0	0	0	0	5	65	10
C16	0	0	0	0	5	10	65

Matrice de confusion entre classes



➔ 100 réalisations aléatoires

Soil classes

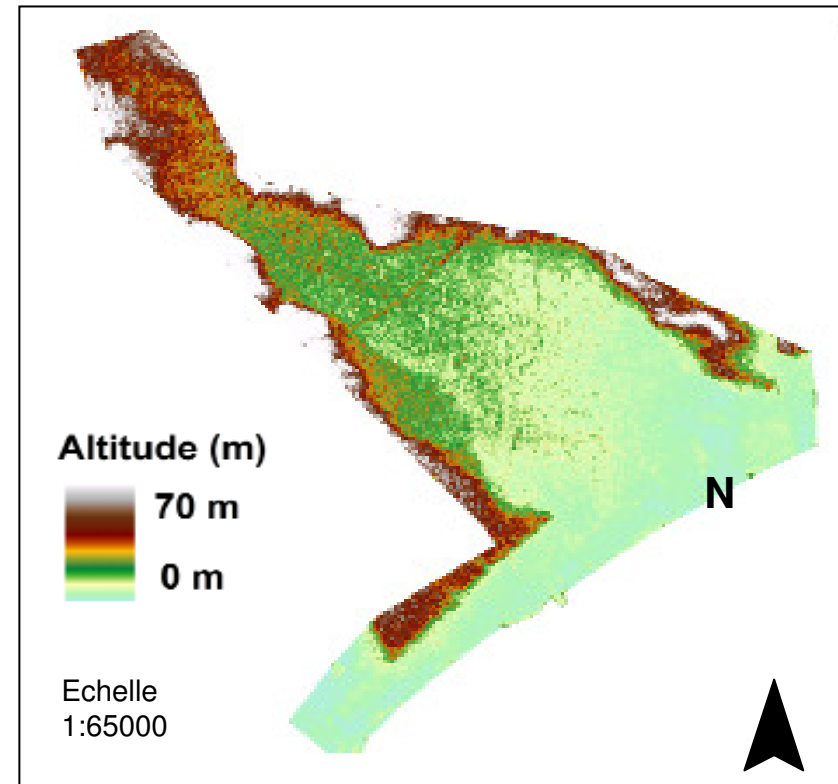


Soil map simulations

( left map is the original one )

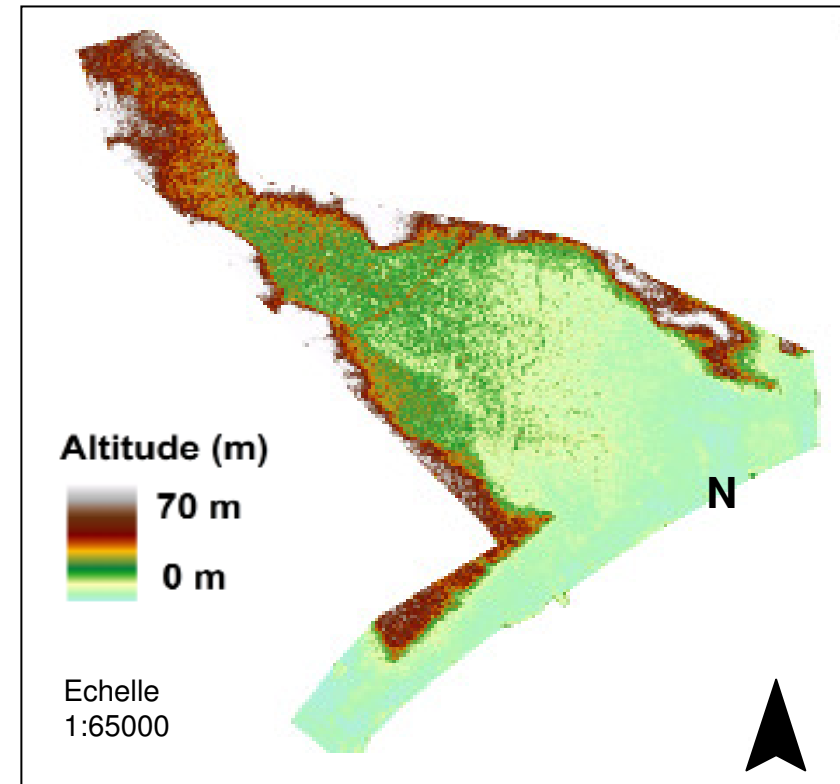
## 2. Décrire les incertitudes : modèle de terrain

- Donnée source
  - Raster, résolution 5m
  - Stéréophotogrammétrie
  - Erreurs de mesure + interpolation



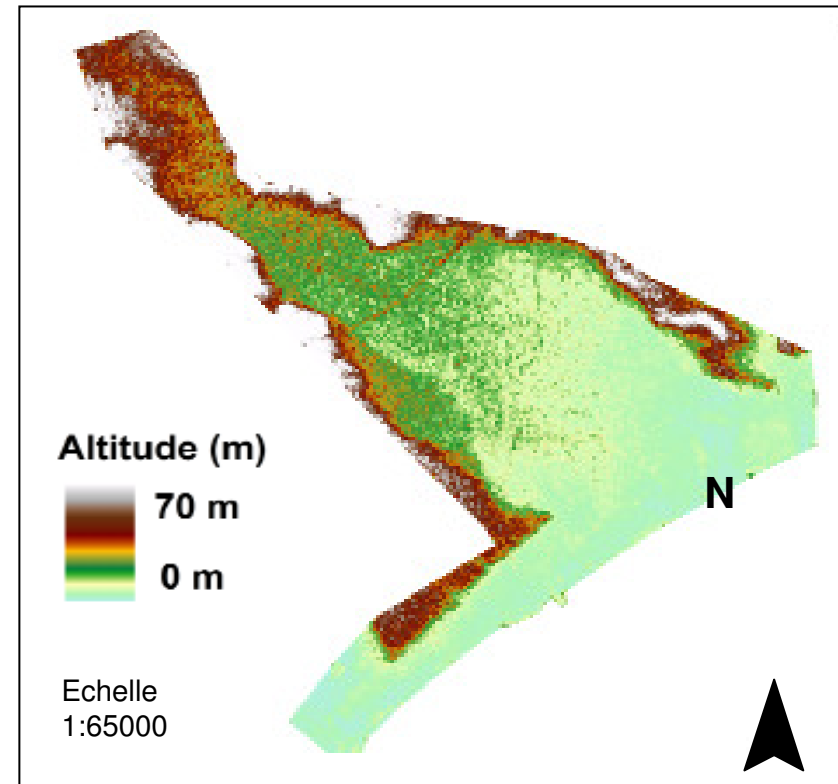
## 2. Décrire les incertitudes : modèle de terrain

- Donnée source
  - Raster, résolution 5m
  - Stéréophotogrammétrie
  - Erreurs de mesure + interpolation
- Campagne terrain
  - 500 points de validation
  - GPS différentiel
  - Structure du champ d'erreur

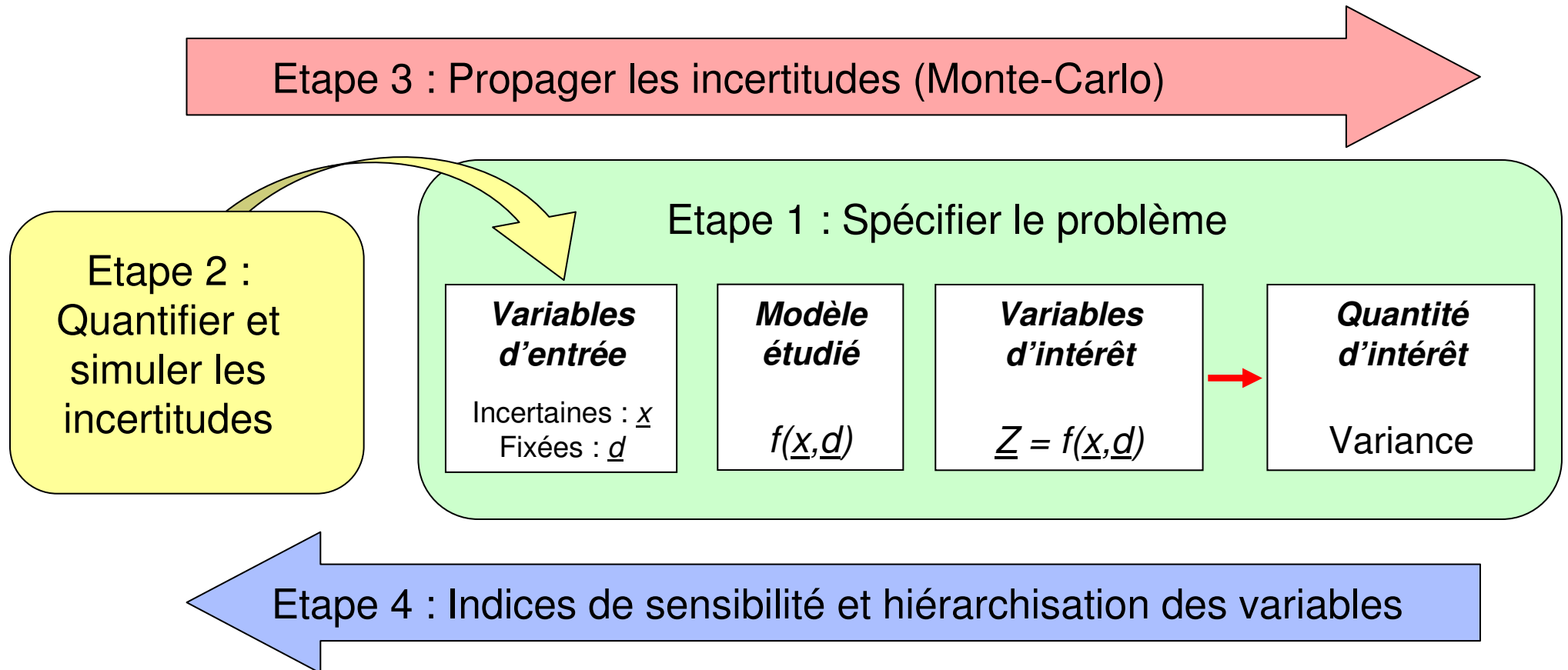


## 2. Décrire les incertitudes : modèle de terrain

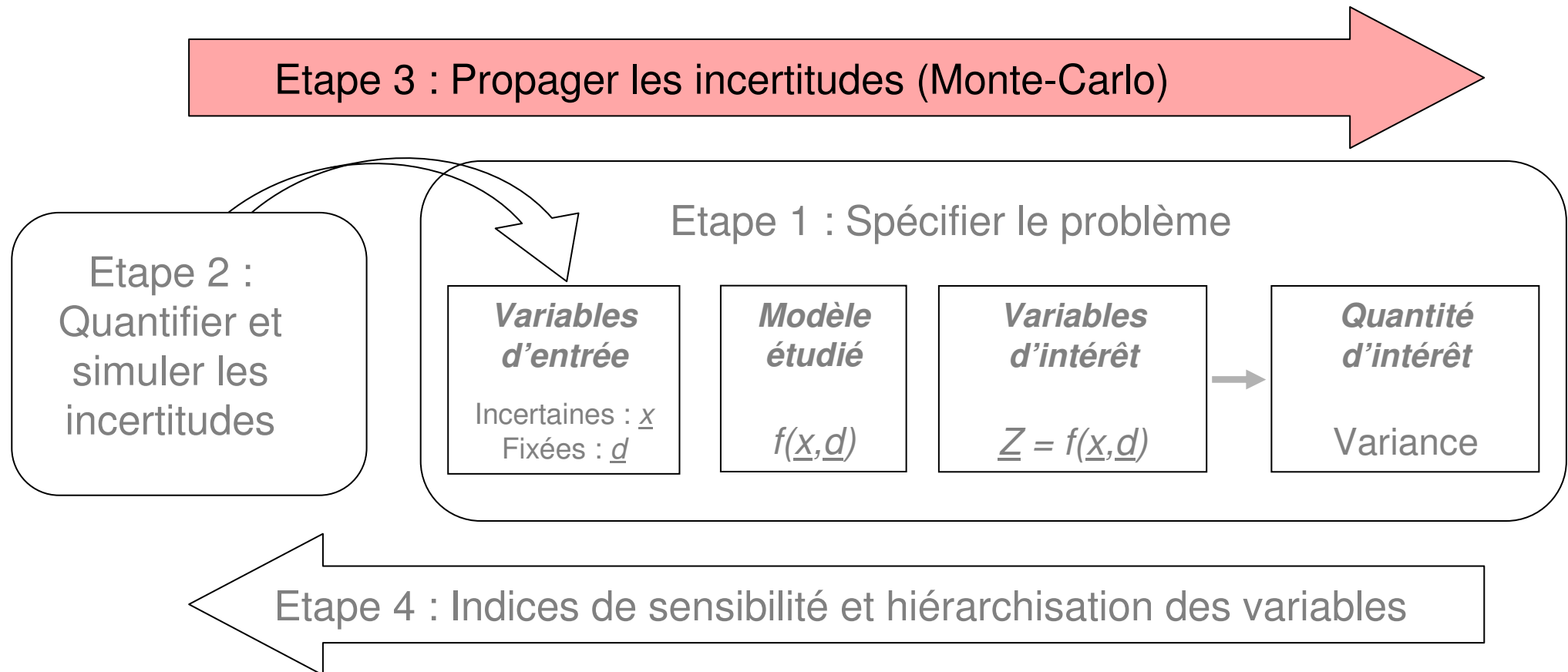
- Donnée source
  - Raster, résolution 5m
  - Stéréophotogrammétrie
  - Erreurs de mesure + interpolation
- Campagne terrain
  - 500 points de validation
  - GPS différentiel
  - Structure du champ d'erreur
- Simulation géostatistique
  - Logiciel SGeMS
  - Direct Sequential Simulation → erreurs d'interpolation
  - Sequential Gaussian Simulation → erreur d'interpolation + erreurs de mesure



# 3. Propager les incertitudes



# 3. Propager les incertitudes



# 3. Propager les incertitudes

- Echantillon de jeux de variables d'entrée
- Evaluations multiples du modèle
- Contraintes : temps de calcul VS taille de l'échantillon

# 3. Propager les incertitudes

X1	X2	X3	X4
1	2	45	5,36
5	3	12	2,1
1	7	78	4,59
8	1	49	7,21
4	5	63	8,12
9	1	70	4,61
6	4	26	5,09
7	2	35	4,85

X1	X2	X3	X4
9	4	50	5,12
5	3	83	8,38
9	-1	17	5,89
2	5	46	3,27
6	1	32	2,36
1	5	25	5,87
4	2	69	5,39
3	4	60	5,63

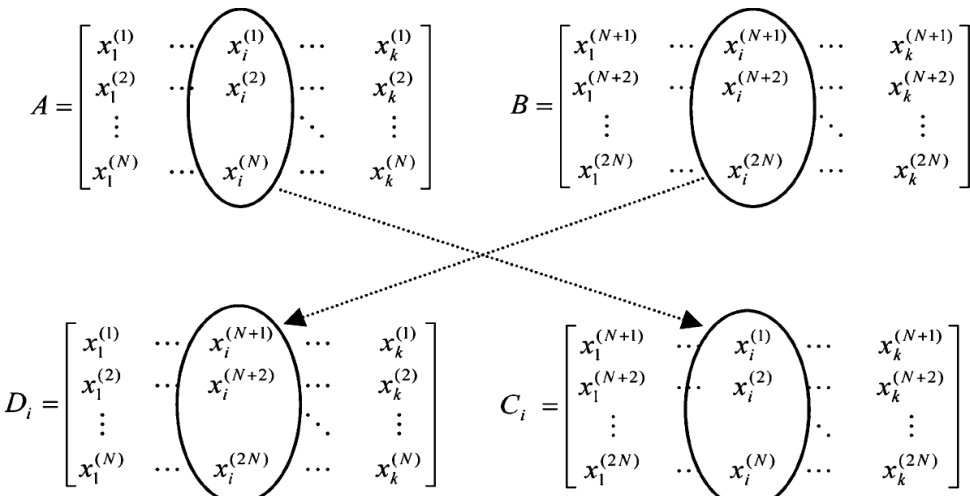
Tirage de deux échantillons quasi-aléatoires  
de taille  $L = 512$  [Sobol, 1995]

# 3. Propager les incertitudes

X1	X2	X3	X4
1	2	45	5,36
5	3	12	2,1
1	7	78	4,59
8	1	49	7,21
4	5	63	8,12
9	1	70	4,61
6	4	26	5,09
7	2	35	4,85

X1	X2	X3	X4
9	4	50	5,12
5	3	83	8,38
9	-1	17	5,89
2	5	46	3,27
6	1	32	2,36
1	5	25	5,87
4	2	69	5,39
3	4	60	5,63

Tirage de deux échantillons quasi-aléatoires de taille  $L = 512$  [Sobol, 1995]



Création d'un nouvel échantillon de taille  $2(N+1)L$  par permutations [Tarantola & Lilburne, 2009]

# 3. Propager les incertitudes

X1	X2	X3	X4
1	2	45	5,36
5	3	12	2,1
1	7	78	4,59
8	1	49	7,21
4	5	63	8,12
9	1	70	4,61
6	4	26	5,09
7	2	35	4,85

X1	X2	X3	X4
9	4	50	5,12
5	3	83	8,38
9	-1	17	5,89
2	5	46	3,27
6	1	32	2,36
1	5	25	5,87
4	2	69	5,39
3	4	60	5,63

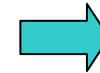
Tirage de deux échantillons quasi-aléatoires de taille  $L = 512$  [Sobol, 1995]



$$A = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_i^{(1)} & \dots & x_k^{(1)} \\ x_1^{(2)} & \dots & x_i^{(2)} & \dots & x_k^{(2)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(N)} & \dots & x_i^{(N)} & \dots & x_k^{(N)} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} x_1^{(N+1)} & \dots & x_i^{(N+1)} & \dots & x_k^{(N+1)} \\ x_1^{(N+2)} & \dots & x_i^{(N+2)} & \dots & x_k^{(N+2)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(2N)} & \dots & x_i^{(2N)} & \dots & x_k^{(2N)} \end{bmatrix}$$

$$D_i = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_i^{(N+1)} & \dots & x_k^{(1)} \\ x_1^{(2)} & \dots & x_i^{(N+2)} & \dots & x_k^{(2)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(N)} & \dots & x_i^{(2N)} & \dots & x_k^{(N)} \end{bmatrix} \quad C_i = \begin{bmatrix} x_1^{(N+1)} & \dots & x_i^{(1)} & \dots & x_k^{(N+1)} \\ x_1^{(N+2)} & \dots & x_i^{(2)} & \dots & x_k^{(N+2)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(2N)} & \dots & x_i^{(N)} & \dots & x_k^{(2N)} \end{bmatrix}$$

Création d'un nouvel échantillon de taille  $2(N+1)L$  par permutations [Tarantola & Lilburne, 2009]



X1	X2	X3	X4
1	2	45	5,36
5	3	12	2,1
1	7	78	4,59
8	1	49	7,21
2	5	46	3,2725
9	1	70	4,61
6	4	26	5,09
7	2	35	4,85
9	4	50	5,1225
5	3	83	8,3825
6	4	26	5,09
2	5	46	3,2725
6	1	32	2,3625
1	5	25	5,8725
4	2	69	5,3925
3	4	60	5,6325
6	4	26	5,09
2	5	46	3,2725

# 3. Propager les incertitudes

X1	X2	X3	X4
1	2	45	5,36
5	3	12	2,1
1	7	78	4,59
8	1	49	7,21
4	5	63	8,12
9	1	70	4,61
6	4	26	5,09
7	2	35	4,85

X1	X2	X3	X4
9	4	50	5,12
5	3	83	8,38
9	-1	17	5,89
2	5	46	3,27
6	1	32	2,36
1	5	25	5,87
4	2	69	5,39
3	4	60	5,63

Tirage de deux échantillons quasi-aléatoires de taille  $L = 512$  [Sobol, 1995]



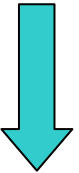
$$A = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_i^{(1)} & \dots & x_k^{(1)} \\ x_1^{(2)} & \dots & x_i^{(2)} & \dots & x_k^{(2)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(N)} & \dots & x_i^{(N)} & \dots & x_k^{(N)} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} x_1^{(N+1)} & \dots & x_i^{(N+1)} & \dots & x_k^{(N+1)} \\ x_1^{(N+2)} & \dots & x_i^{(N+2)} & \dots & x_k^{(N+2)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(2N)} & \dots & x_i^{(2N)} & \dots & x_k^{(2N)} \end{bmatrix}$$

$$D_i = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_i^{(N+1)} & \dots & x_k^{(1)} \\ x_1^{(2)} & \dots & x_i^{(N+2)} & \dots & x_k^{(2)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(N)} & \dots & x_i^{(2N)} & \dots & x_k^{(N)} \end{bmatrix} \quad C_i = \begin{bmatrix} x_1^{(N+1)} & \dots & x_i^{(1)} & \dots & x_k^{(N+1)} \\ x_1^{(N+2)} & \dots & x_i^{(2)} & \dots & x_k^{(N+2)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(2N)} & \dots & x_i^{(N)} & \dots & x_k^{(2N)} \end{bmatrix}$$

Création d'un nouvel échantillon de taille  $2(N+1)L$  par permutations [Tarantola & Lilburne, 2009]



Evaluations multiples du modèle AquiferSim



X1	X2	X3	X4	Y
1	2	45	5,36	1,727
5	3	12	2,1	1,344
1	7	78	4,59	1,957
8	1	49	7,21	1,814
2	5	46	3,2725	1,75
9	1	70	4,61	1,927
6	4	26	5,09	1,614
7	2	35	4,85	1,689
9	4	50	5,1225	1,833
5	3	83	8,3825	1,997
6	4	26	5,09	1,614
2	5	46	3,2725	1,75
6	1	32	2,3625	1,617
1	5	25	5,8725	1,567
4	2	69	5,3925	1,905
3	4	60	5,6325	1,861
6	4	26	5,09	1,614
2	5	46	3,2725	1,75

# 3. Propager les incertitudes

X1	X2	X3	X4
1	2	45	5,36
5	3	12	2,1
1	7	78	4,59
8	1	49	7,21
4	5	63	8,12
9	1	70	4,61
6	4	26	5,09
7	2	35	4,85

X1	X2	X3	X4
9	4	50	5,12
5	3	83	8,38
9	-1	17	5,89
2	5	46	3,27
6	1	32	2,36
1	5	25	5,87
4	2	69	5,39
3	4	60	5,63

Tirage de deux échantillons quasi-aléatoires de taille  $L = 512$  [Sobol, 1995]



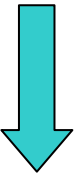
$$A = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_i^{(1)} & \dots & x_k^{(1)} \\ x_1^{(2)} & \dots & x_i^{(2)} & \dots & x_k^{(2)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(N)} & \dots & x_i^{(N)} & \dots & x_k^{(N)} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} x_1^{(N+1)} & \dots & x_i^{(N+1)} & \dots & x_k^{(N+1)} \\ x_1^{(N+2)} & \dots & x_i^{(N+2)} & \dots & x_k^{(N+2)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(2N)} & \dots & x_i^{(2N)} & \dots & x_k^{(2N)} \end{bmatrix}$$

$$D_i = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_i^{(N+1)} & \dots & x_k^{(1)} \\ x_1^{(2)} & \dots & x_i^{(N+2)} & \dots & x_k^{(2)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(N)} & \dots & x_i^{(2N)} & \dots & x_k^{(N)} \end{bmatrix} \quad C_i = \begin{bmatrix} x_1^{(N+1)} & \dots & x_i^{(1)} & \dots & x_k^{(N+1)} \\ x_1^{(N+2)} & \dots & x_i^{(2)} & \dots & x_k^{(N+2)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(2N)} & \dots & x_i^{(N)} & \dots & x_k^{(2N)} \end{bmatrix}$$

Création d'un nouvel échantillon de taille  $2(N+1)L$  par permutations [Tarantola & Lilburne, 2009]



Evaluations multiples du modèle AquiferSim



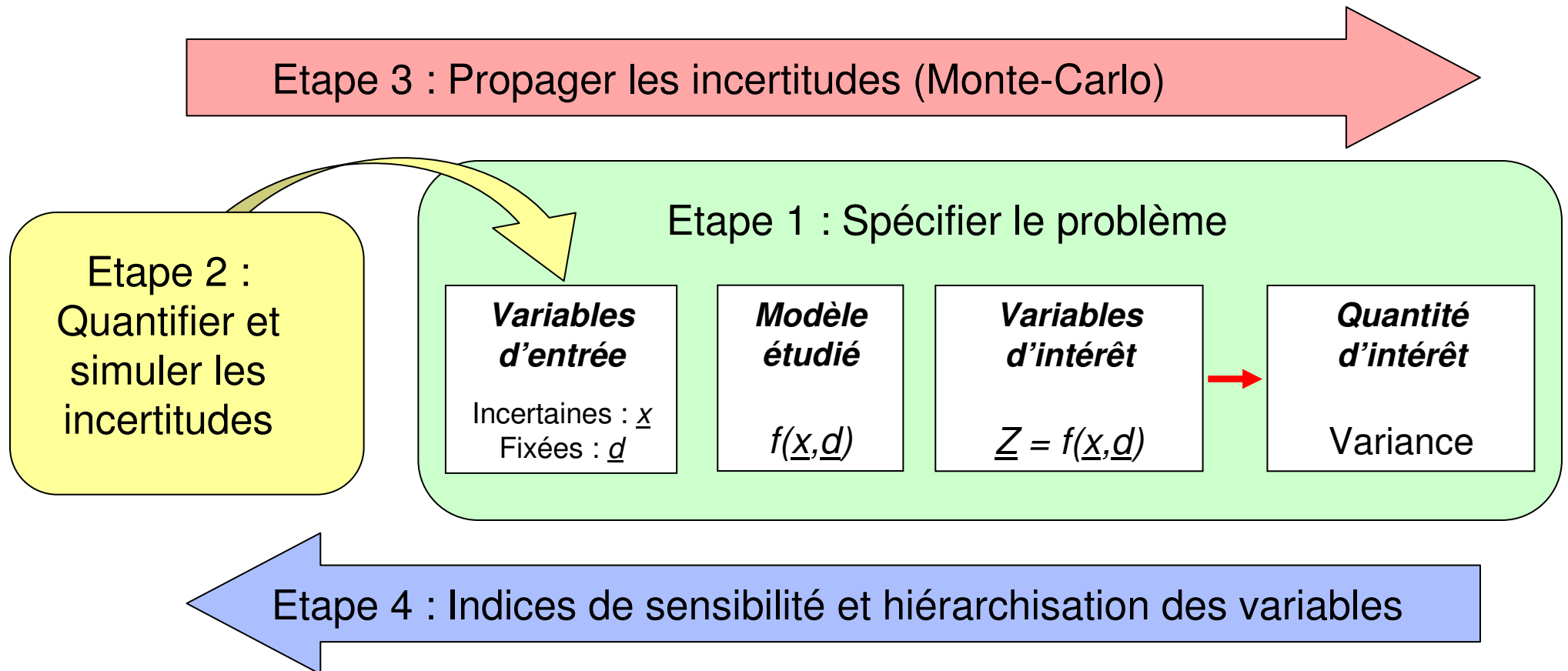
X1	X2	X3	X4	Y
1	2	45	5,36	1,727
5	3	12	2,1	1,344
1	7	78	4,59	1,957
8	1	49	7,21	1,814
2	5	46	3,2725	1,75
9	1	70	4,61	1,927
6	4	26	5,09	1,614
7	2	35	4,85	1,689
9	4	50	5,1225	1,833
5	3	83	8,3825	1,997
6	4	26	5,09	1,614
2	5	46	3,2725	1,75
6	1	32	2,3625	1,617
1	5	25	5,8725	1,567
4	2	69	5,3925	1,905
3	4	60	5,6325	1,861
6	4	26	5,09	1,614
2	5	46	3,2725	1,75

# 3. Propager les incertitudes

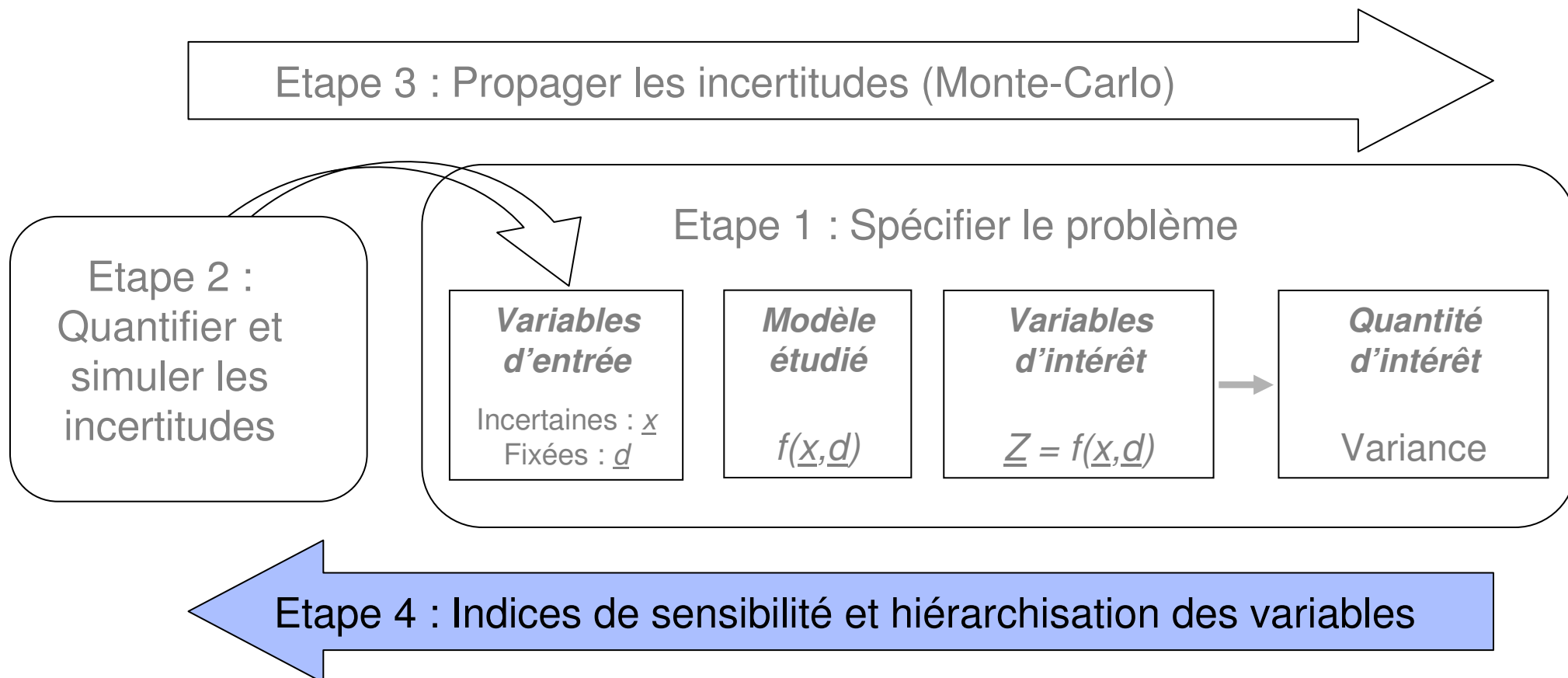
- Coût CPU important :

Coût d'une simulation	1 min
Nombre de variables incertaines	5
Taille L des échantillons de base	512
Nombre de simulations	$2.L.(N+1) = 6144$
Puissance de calcul	10 CPU de 2.66 GHz
Temps de calcul	10h

# 4. Indices de sensibilité de Sobol

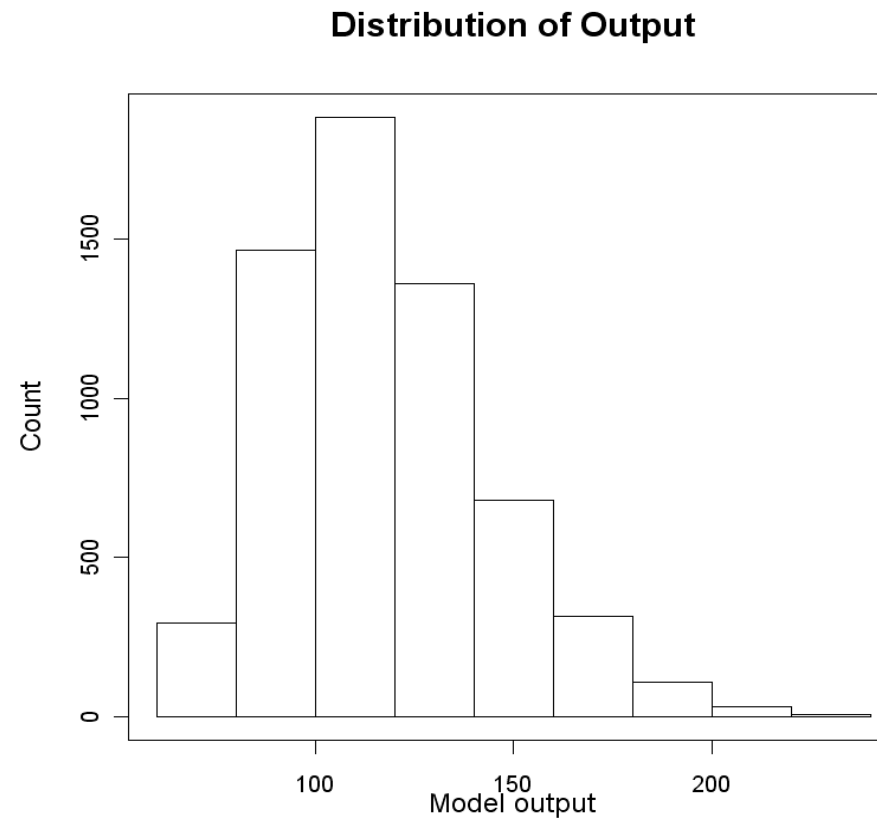


# 4. Indices de sensibilité de Sobol



# 4. Indices de sensibilité de Sobol

- Premier résultat : distribution empirique de Y

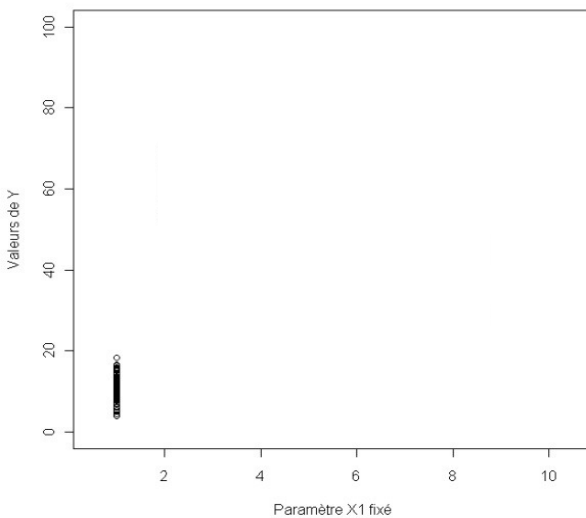


# 4. Indices de sensibilité de Sobol

# 4. Indices de sensibilité de Sobol

Etude de la distribution de Y quand on fixe un paramètre ( $X_i$ )

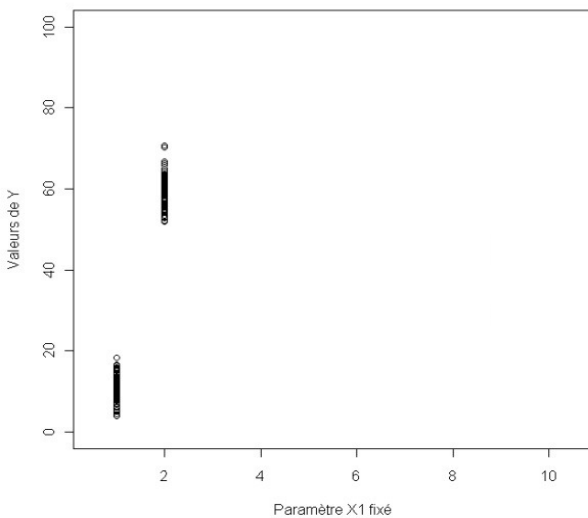
Distribution de Y en fonction des valeurs fixées de X1



# 4. Indices de sensibilité de Sobol

Etude de la distribution de Y quand on fixe un paramètre ( $X_i$ )

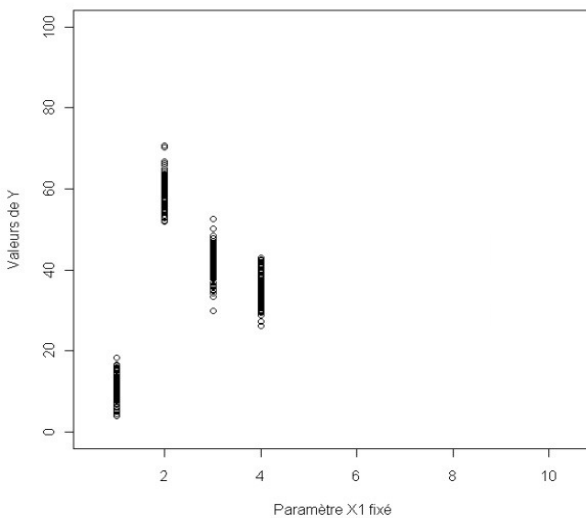
Distribution de Y en fonction des valeurs fixées de X1



# 4. Indices de sensibilité de Sobol

Etude de la distribution de Y quand on fixe un paramètre ( $X_i$ )

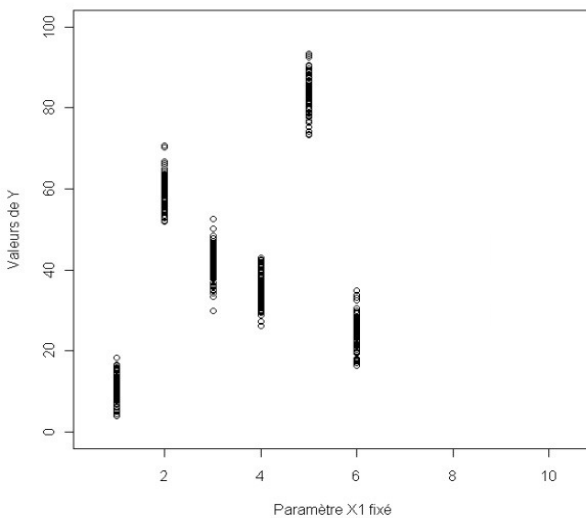
Distribution de Y en fonction des valeurs fixées de X1



# 4. Indices de sensibilité de Sobol

Etude de la distribution de Y quand on fixe un paramètre ( $X_i$ )

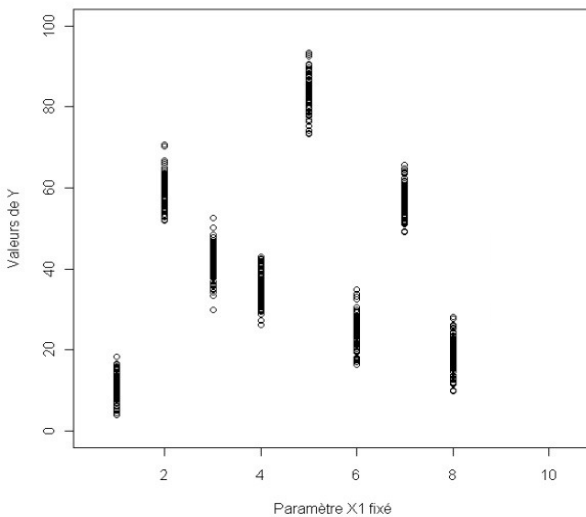
Distribution de Y en fonction des valeurs fixées de X1



# 4. Indices de sensibilité de Sobol

Etude de la distribution de Y quand on fixe un paramètre ( $X_i$ )

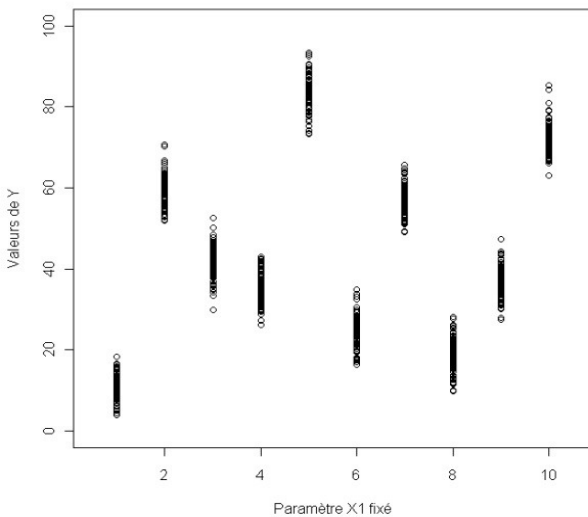
Distribution de Y en fonction des valeurs fixées de X1



# 4. Indices de sensibilité de Sobol

Etude de la distribution de Y quand on fixe un paramètre ( $X_i$ )

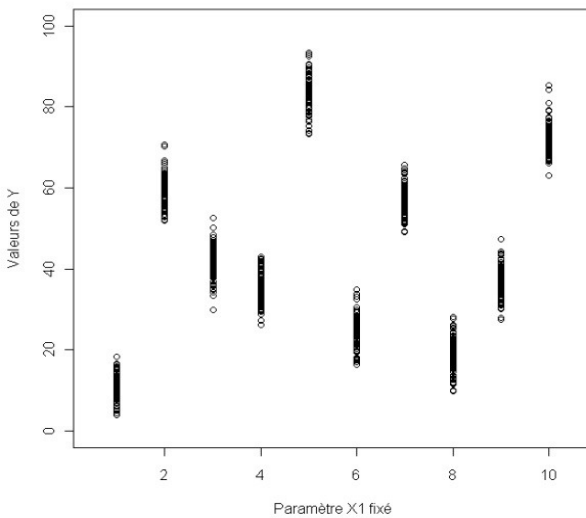
Distribution de Y en fonction des valeurs fixées de X1



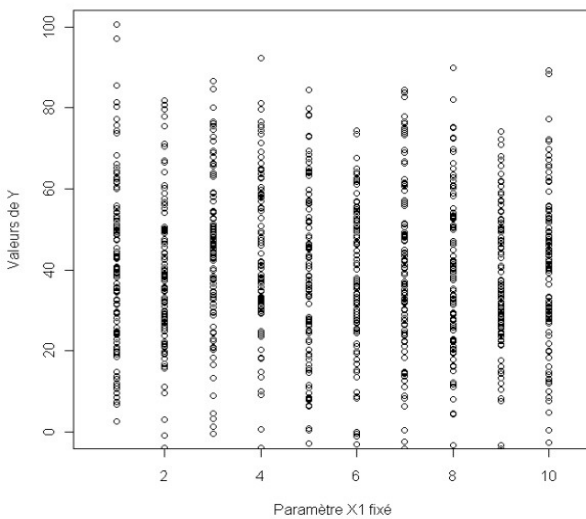
# 4. Indices de sensibilité de Sobol

Etude de la distribution de Y quand on fixe un paramètre ( $X_i$ )

Distribution de Y en fonction des valeurs fixées de X1



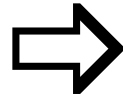
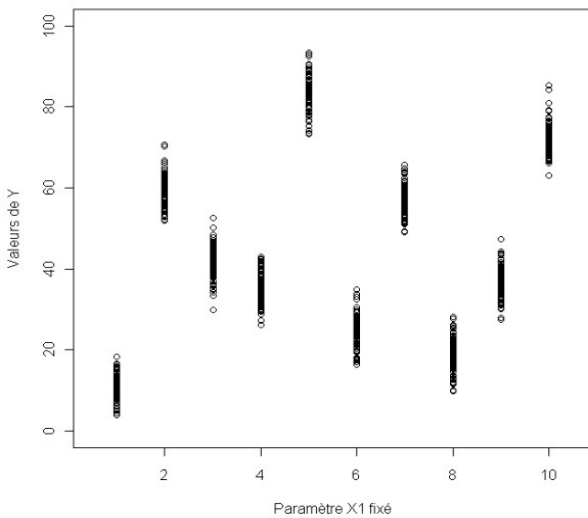
Distribution de Y en fonction des valeurs fixées de X1



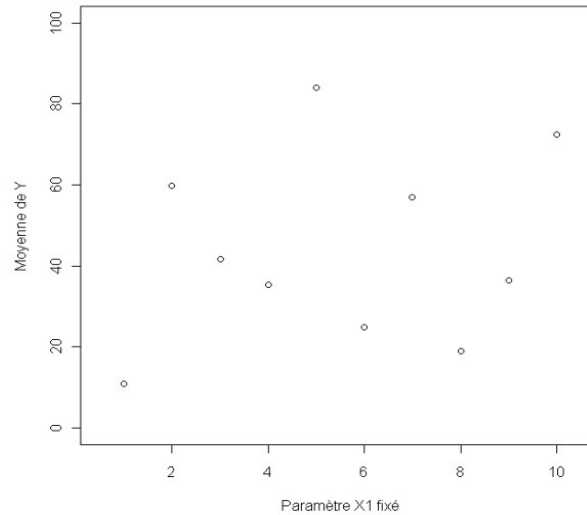
# 4. Indices de sensibilité de Sobol

Etude de la distribution de Y quand on fixe un paramètre ( $X_i$ )

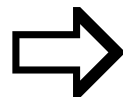
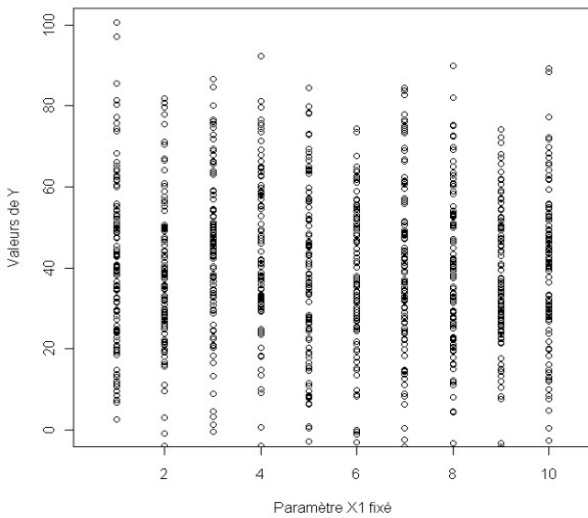
Distribution de Y en fonction des valeurs fixées de X1



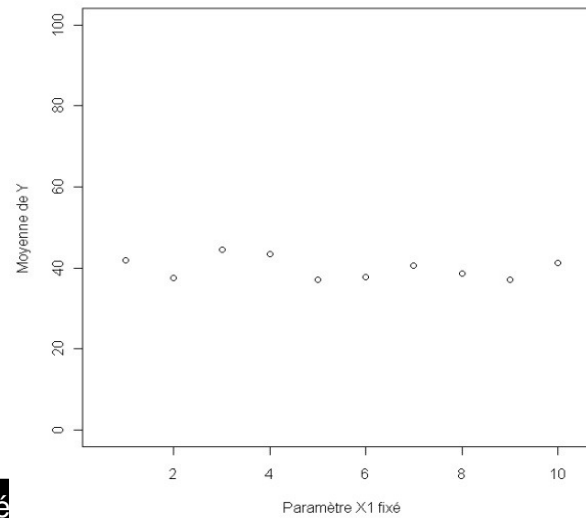
Moyenne de Y en fonction des valeurs fixées de X1



Distribution de Y en fonction des valeurs fixées de X1



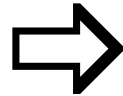
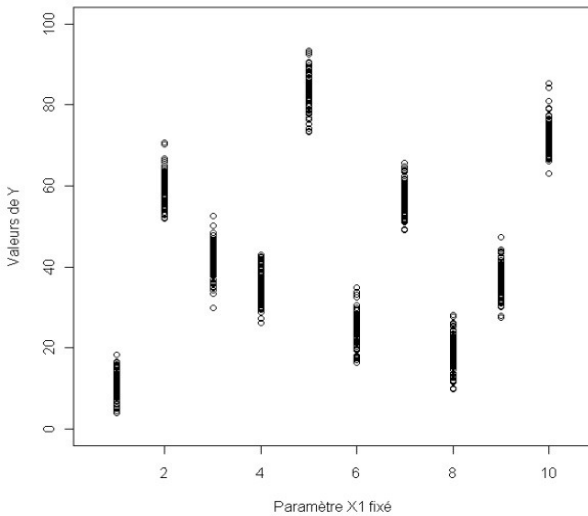
Moyenne de Y en fonction des valeurs fixées de X1



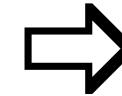
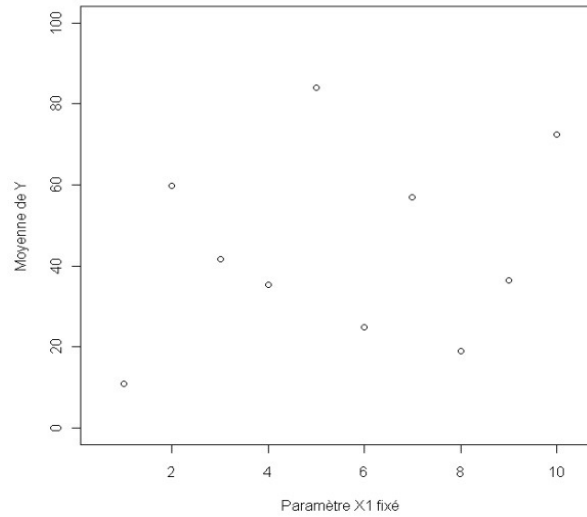
# 4. Indices de sensibilité de Sobol

Etude de la distribution de Y quand on fixe un paramètre ( $X_i$ )

Distribution de Y en fonction des valeurs fixées de X1

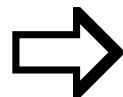
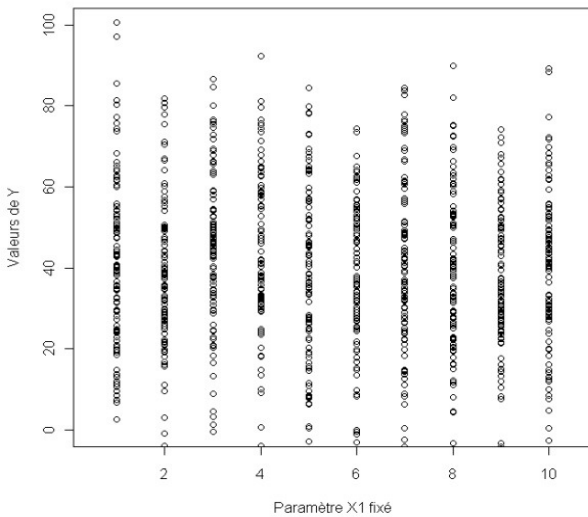


Moyenne de Y en fonction des valeurs fixées de X1

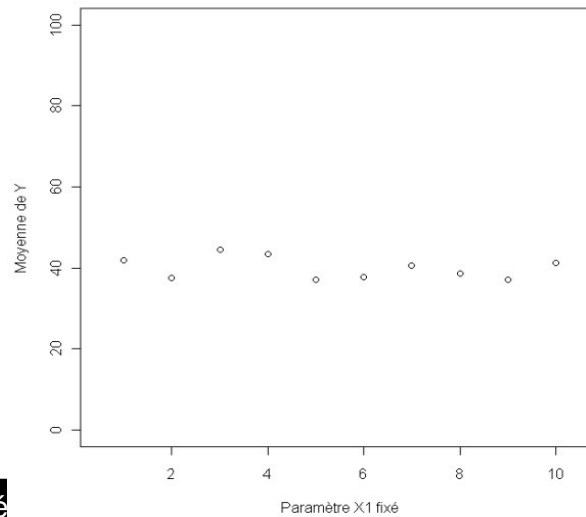


$\text{Var}(E[Y|X_1])$   
grand

Distribution de Y en fonction des valeurs fixées de X1



Moyenne de Y en fonction des valeurs fixées de X1



$\text{Var}(E[Y|X_1])$   
petit

# 4. Indices de sensibilité de Sobol

- Indice de Sobol de premier ordre :

$$S_i = \frac{V_i}{V} = \frac{V_{X_i} \left( E_{X_{-i}} (Y | X_i) \right)}{V}$$

# 4. Indices de sensibilité de Sobol

- Indice de Sobol de premier ordre :

$$S_i = \frac{V_i}{V} = \frac{V_{X_i} \left( E_{X_{-i}} (Y | X_i) \right)}{V}$$

- Traduit l'impact de l'incertitude sur  $X_i$

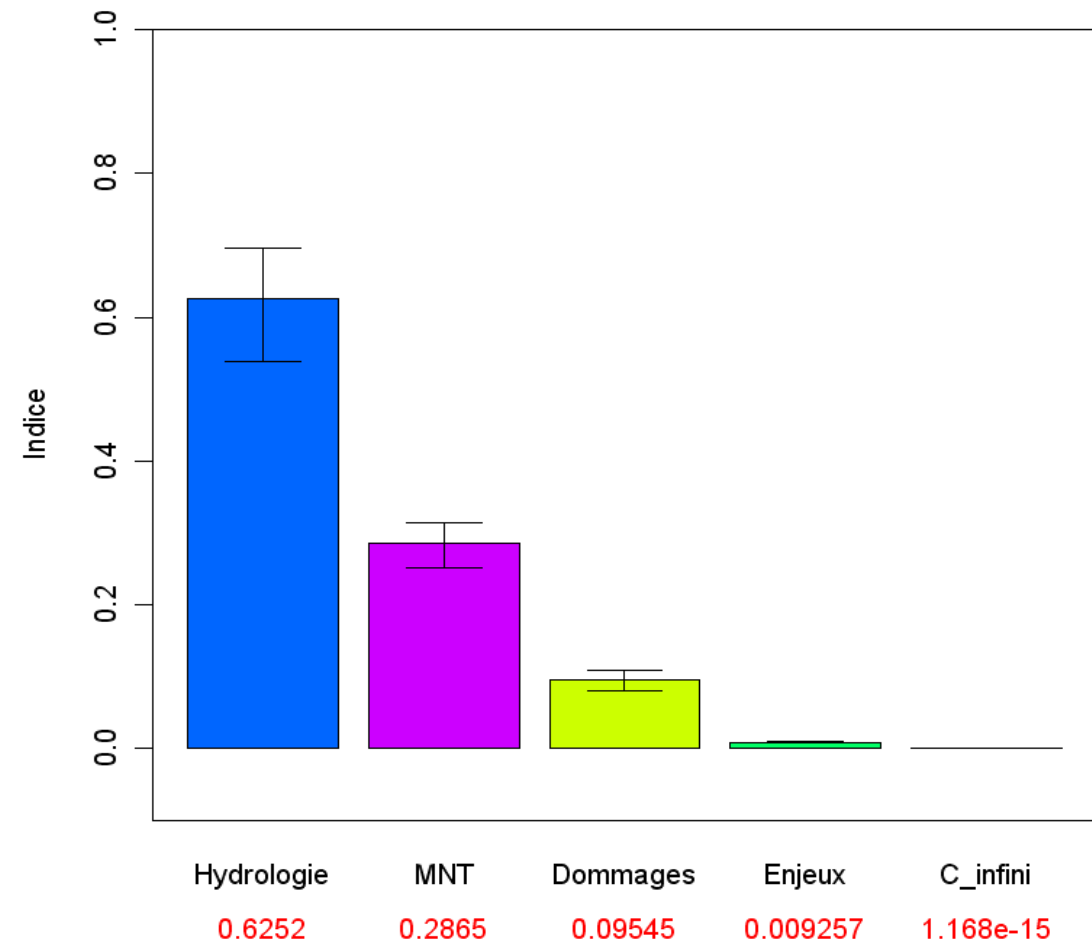
# 4. Indices de sensibilité de Sobol

- Indice de Sobol de premier ordre :

$$S_i = \frac{V_i}{V} = \frac{V_{X_i} (E_{X_{-i}} (Y|X_i))}{V}$$

- Traduit l'impact de l'incertitude sur  $X_i$
- Hiérarchie des variables incertaines

Indices de Sobol de premier ordre  
(with 95% confidence interval)



## 4. Indices de sensibilité de Sobol

- Décomposition de la variance en variances conditionnelles :

$$V_1 = \text{Var}[E(Y | X_1)] \quad V_{1,2} = \text{Var}[E(Y | X_1, X_2)]$$

# 4. Indices de sensibilité de Sobol

- Décomposition de la variance en variances conditionnelles :

$$V_1 = \text{Var}[E(Y | X_1)] \quad V_{1,2} = \text{Var}[E(Y | X_1, X_2)]$$

$$V = \sum_{i=1}^k V_i + \sum_i \sum_j V_{ij} + \sum_i \sum_j \sum_k V_{ijk} \dots + V_{1,2,\dots,k}$$

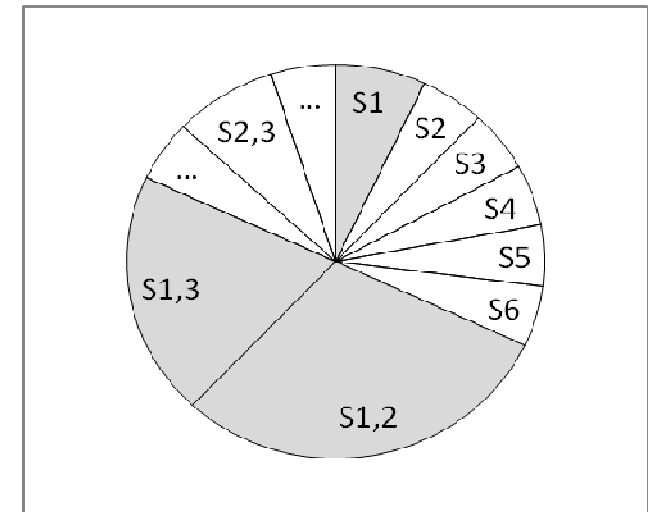
# 4. Indices de sensibilité de Sobol

- Décomposition de la variance en variances conditionnelles :

$$V_1 = \text{Var}[E(Y | X_1)] \quad V_{1,2} = \text{Var}[E(Y | X_1, X_2)]$$

$$V = \sum_{i=1}^k V_i + \sum_i \sum_j V_{ij} + \sum_i \sum_j \sum_k V_{ijk} \dots + V_{1,2,\dots,k}$$

$$1 = \sum_{i=1}^k S_i + \sum_i \sum_j S_{ij} + \sum_i \sum_j \sum_k S_{ijk} \dots + S_{1,2,\dots,k}$$



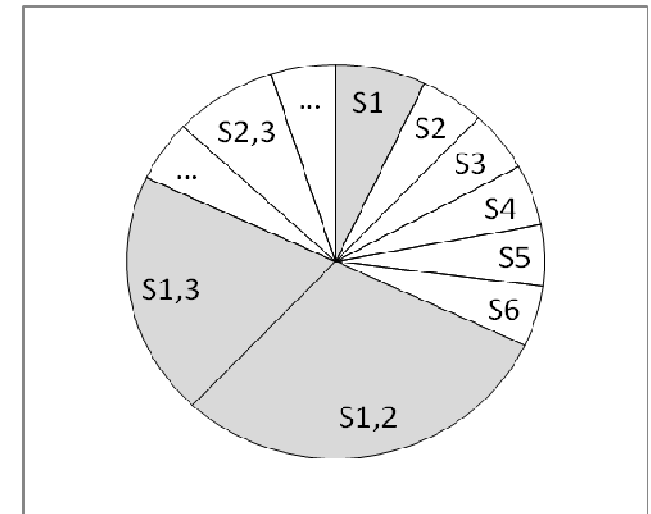
# 4. Indices de sensibilité de Sobol

- Décomposition de la variance en variances conditionnelles :

$$V_1 = \text{Var}[E(Y | X_1)] \quad V_{1,2} = \text{Var}[E(Y | X_1, X_2)]$$

$$V = \sum_{i=1}^k V_i + \sum_i \sum_j V_{ij} + \sum_i \sum_j \sum_k V_{ijk} \dots + V_{1,2,\dots,k}$$

$$1 = \sum_{i=1}^k S_i + \sum_i \sum_j S_{ij} + \sum_i \sum_j \sum_k S_{ijk} \dots + S_{1,2,\dots,k}$$



- Indice de Sobol total :

$$S_{T1} = S_1 + S_{1,2} + S_{1,3} + \dots + S_{1,2,3} + \dots$$

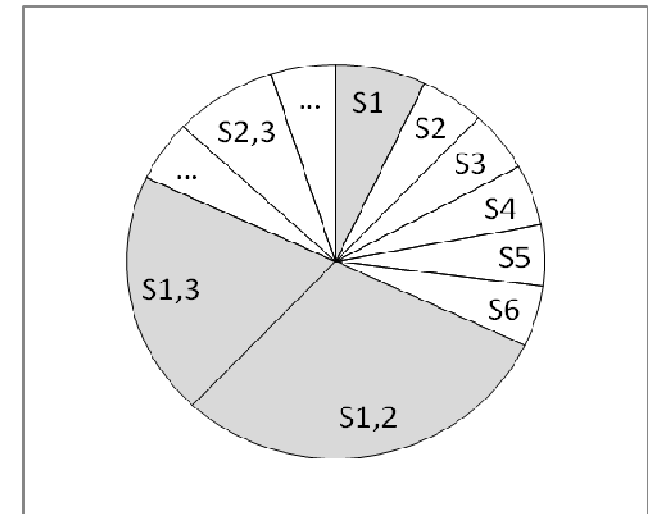
# 4. Indices de sensibilité de Sobol

- Décomposition de la variance en variances conditionnelles :

$$V_1 = \text{Var}[E(Y | X_1)] \quad V_{1,2} = \text{Var}[E(Y | X_1, X_2)]$$

$$V = \sum_{i=1}^k V_i + \sum_i \sum_j V_{ij} + \sum_i \sum_j \sum_k V_{ijk} \dots + V_{1,2,\dots,k}$$

$$1 = \sum_{i=1}^k S_i + \sum_i \sum_j S_{ij} + \sum_i \sum_j \sum_k S_{ijk} \dots + S_{1,2,\dots,k}$$



- Indice de Sobol total :

$$S_{T1} = S_1 + S_{1,2} + S_{1,3} + \dots + S_{1,2,3} + \dots$$

- Impact de l'incertitude sur  $X_i$  et de ses interactions avec les autres variables

# 4. Indices de sensibilité de Sobol

- Estimateurs proposés par [Tarantola & Lilburne, 2009]
- Précision estimée par bootstrap (100 répliques)

$$\hat{S}_i^I = \frac{y_A \cdot y_C - y_A \cdot y_B}{y_A \cdot y_A - y_A \cdot y_B}$$

$$\hat{S}_i^{II} = \frac{y_A \cdot y_C - y_A \cdot y_B}{y_B \cdot y_B - y_A \cdot y_B}$$

$$\hat{S}_i^{III} = \frac{y_A \cdot y_C - y_C \cdot y_D}{y_C \cdot y_C - y_C \cdot y_D}$$

$$\hat{S}_i^{IV} = \frac{y_A \cdot y_C - y_C \cdot y_D}{y_D \cdot y_D - y_C \cdot y_D}$$

$$\hat{S}_i^V = \frac{y_B \cdot y_D - y_A \cdot y_B}{y_A \cdot y_A - y_A \cdot y_B}$$

$$\hat{S}_i^{VI} = \frac{y_B \cdot y_D - y_A \cdot y_B}{y_B \cdot y_B - y_A \cdot y_B}$$

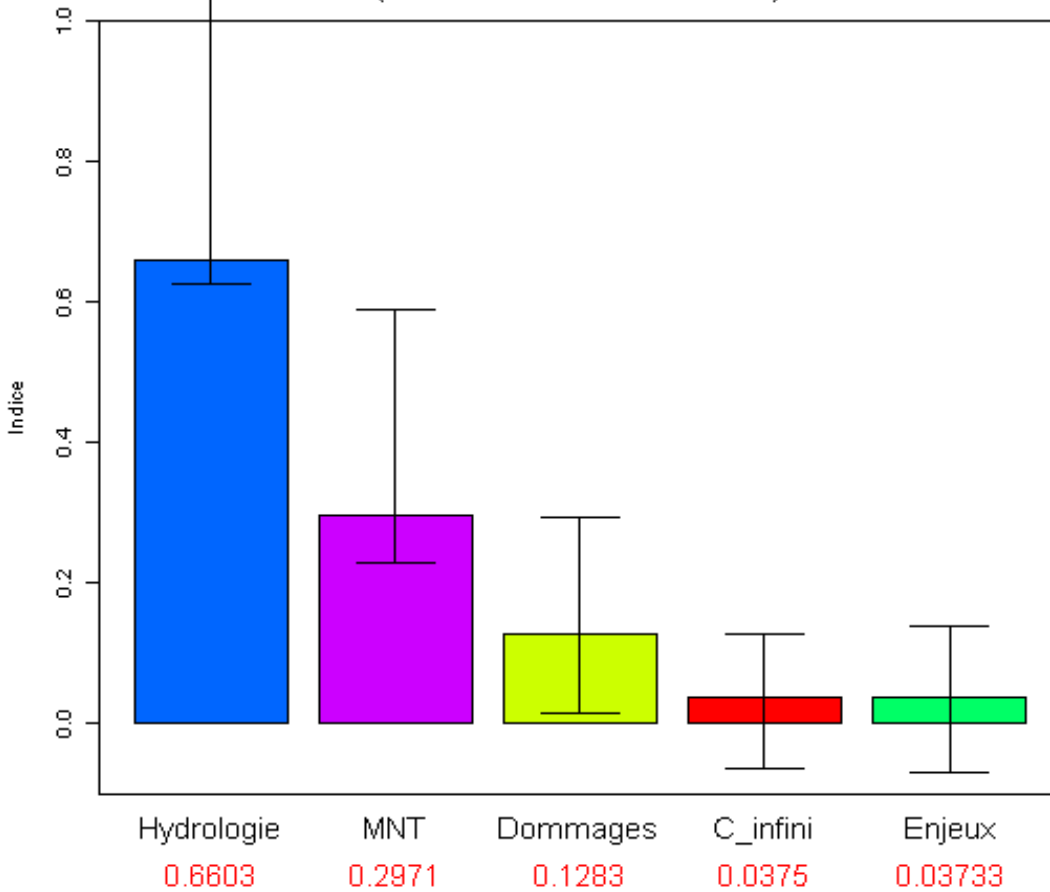
$$\hat{S}_i^{VII} = \frac{y_B \cdot y_D - y_C \cdot y_D}{y_C \cdot y_C - y_C \cdot y_D}$$

$$\hat{S}_i^{VIII} = \frac{y_B \cdot y_D - y_C \cdot y_D}{y_D \cdot y_D - y_C \cdot y_D}$$

# 4. Indices de sensibilité de Sobol

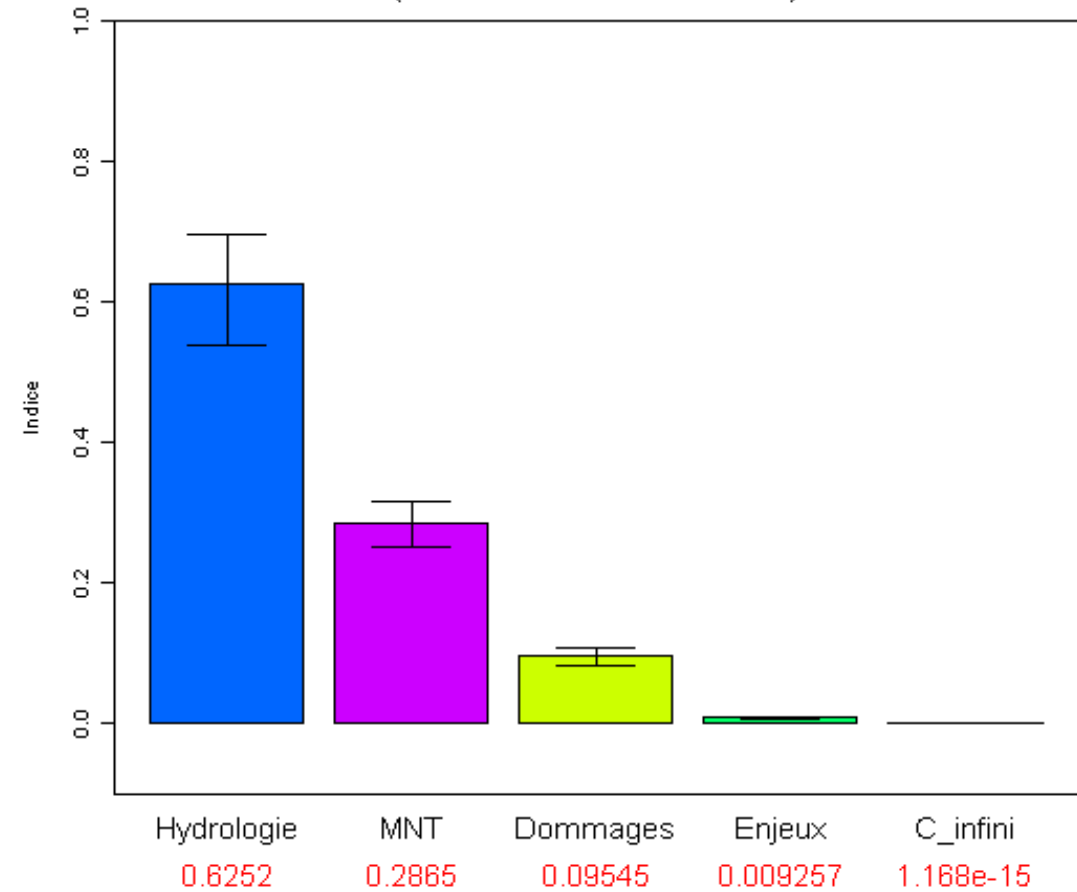
## First order sensitivity indices

(with 95% confidence interval)



## Total order sensitivity indices

(with 95% confidence interval)



# Conclusion

# Conclusion

- Résultats :
  - Variabilité des sorties du modèle
  - Hiérarchie des paramètres incertains

# Conclusion

- Résultats :
  - Variabilité des sorties du modèle
  - Hiérarchie des paramètres incertains
- Points forts :
  - Modèle « boîte noire »
  - Pas de contraintes sur les modèles d'incertitude utilisés
  - Tout type de paramètres incertains : scalaires, cartes, tables...
  - Éléments qualitatifs sur les interactions entre  $X_j$
  - Peut rendre compte d'effets fortement non-linéaires

# Conclusion

- Résultats :
  - Variabilité des sorties du modèle
  - Hiérarchie des paramètres incertains
- Points forts :
  - Modèle « boîte noire »
  - Pas de contraintes sur les modèles d'incertitude utilisés
  - Tout type de paramètres incertains : scalaires, cartes, tables...
  - Éléments qualitatifs sur les interactions entre  $X_j$
  - Peut rendre compte d'effets fortement non-linéaires
- Limites
  - Coût CPU élevé

# Une méthode facile à mettre en oeuvre

- Une librairie sous R : « sensitivity »
  - Création du plan d'expérience
  - Evaluations multiples du modèle
  - Calcul des indices de Sobol
  - Graphes récapitulatifs

# Une méthode facile à mettre en oeuvre

- Une librairie sous R : « sensitivity »
  - Création du plan d'expérience
  - Evaluations multiples du modèle
  - Calcul des indices de Sobol
  - Graphes récapitulatifs
  
- Des logiciels
  - SimLab : <http://simlab.jrc.ec.europa.eu/>
  - DUE : Data Uncertainty Engine
  - Open TURNS

# Bibliographie

- Iooss, B. & Ribatet, M. (2009), 'Global sensitivity analysis of computer models with functional inputs', *Reliability Engineering and System Safety* **94**, 1194 - 1204.
- Lilburne, L. & Tarantola, S. (2009), 'Sensitivity analysis of spatial models', *International Journal of Geographical Information Science* **23:2**, 151-168.
- Saltelli, A.; Ratto, M.; Andres, T.; Campolongo, F.; Cariboni, J.; Gatelli, D.; Saisana, M. & Tarantola, S. (2008), *Global Sensitivity Analysis - The Primer*, Wiley.
- Tarantola, S. (2008), 'Global Sensitivity Analysis of complex models', Seminar Series 2008, Centre for Process Systems Engineering/Imperial College London.

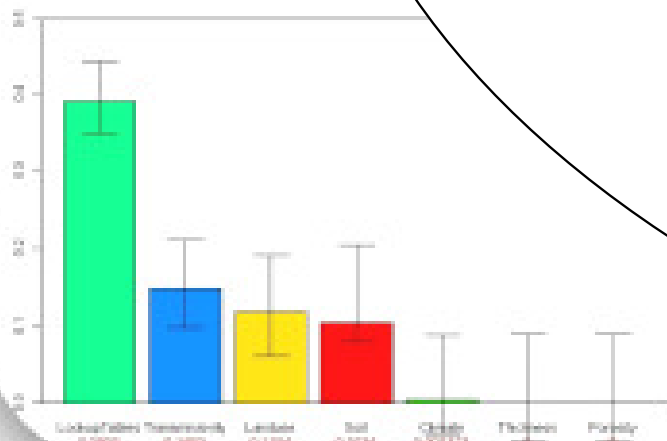
# Bibliographie

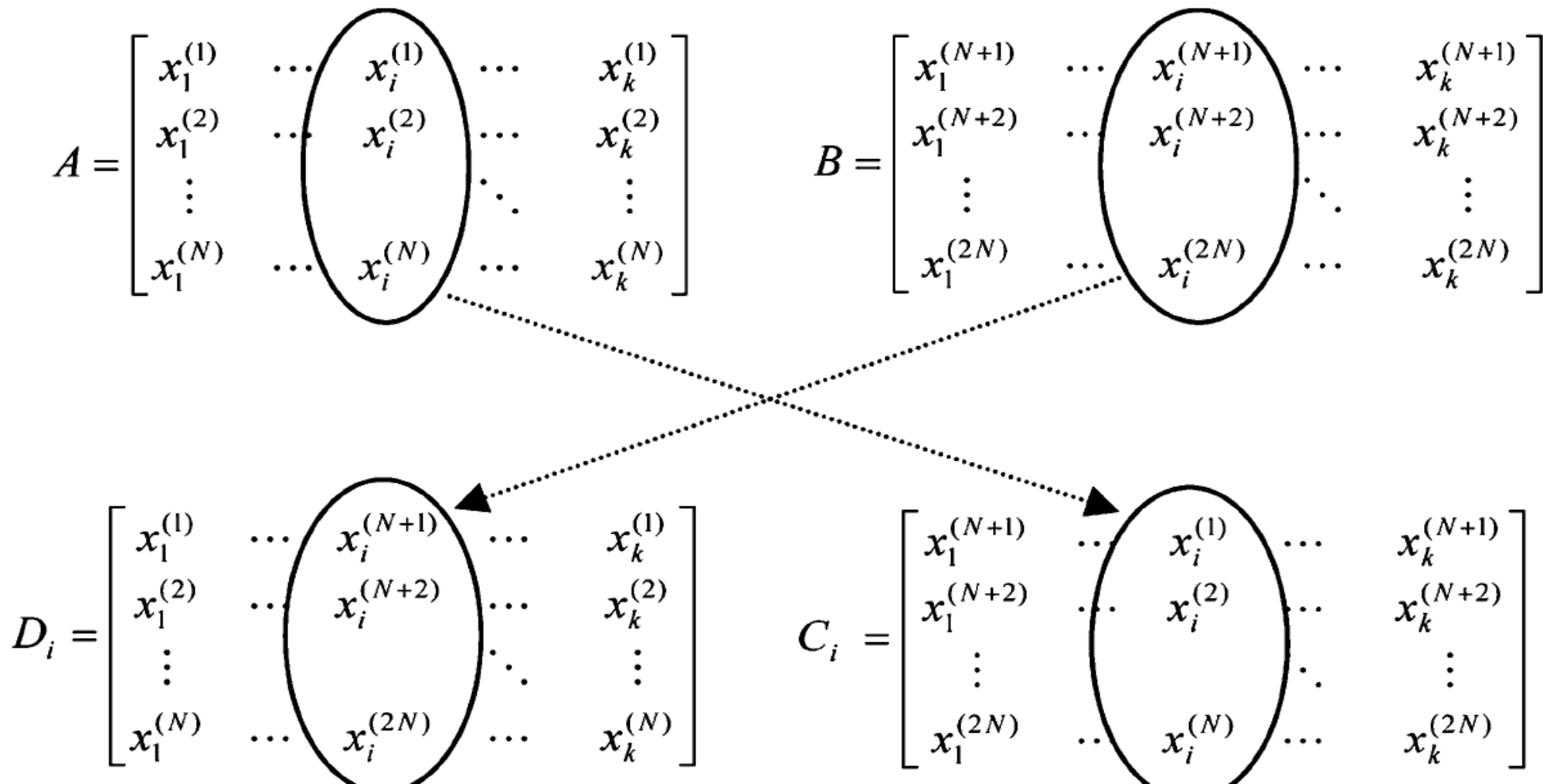
- Iooss, B. & Ribatet, M. (2009), 'Global sensitivity analysis of computer models with functional inputs', *Reliability Engineering and System Safety* **94**, 1194 - 1204.
- Lilburne, L. & Tarantola, S. (2009), 'Sensitivity analysis of spatial models', *International Journal of Geographical Information Science* **23:2**, 151-168.
- Saltelli, A.; Ratto, M.; Andres, T.; Campolongo, F.; Cariboni, J.; Gatelli, D.; Saisana, M. & Tarantola, S. (2008), *Global Sensitivity Analysis - The Primer*, Wiley.
- Tarantola, S. (2008), 'Global Sensitivity Analysis of complex models', Seminar Series 2008, Centre for Process Systems Engineering/Imperial College London.

Nathalie SAINT-GEOURS  
Doctorante UMR TETIS

Merci pour  
votre attention

Journée OSIDEAL  
28 avril 2010





Permutation des échantillons pour la  $i^{\text{ème}}$  variable d'entrée

$$\hat{S}_i^I = \frac{y_A \cdot y_C - y_A \cdot y_B}{y_A \cdot y_A - y_A \cdot y_B}$$

$$\hat{S}_i^{II} = \frac{y_A \cdot y_C - y_A \cdot y_B}{y_B \cdot y_B - y_A \cdot y_B}$$

$$\hat{S}_i^{III} = \frac{y_A \cdot y_C - y_C \cdot y_D}{y_C \cdot y_C - y_C \cdot y_D}$$

$$\hat{S}_i^{IV} = \frac{y_A \cdot y_C - y_C \cdot y_D}{y_D \cdot y_D - y_C \cdot y_D}$$

$$\hat{S}_i^V = \frac{y_B \cdot y_D - y_A \cdot y_B}{y_A \cdot y_A - y_A \cdot y_B}$$

$$\hat{S}_i^{VI} = \frac{y_B \cdot y_D - y_A \cdot y_B}{y_B \cdot y_B - y_A \cdot y_B}$$

$$\hat{S}_i^{VII} = \frac{y_B \cdot y_D - y_C \cdot y_D}{y_C \cdot y_C - y_C \cdot y_D}$$

$$\hat{S}_i^{VIII} = \frac{y_B \cdot y_D - y_C \cdot y_D}{y_D \cdot y_D - y_C \cdot y_D}$$